د رمضان محمد جهيمة

الجبر الخطي

دار الكتاب الجديد
المتحدة

للتحويلات الخطية أهمية خاصة وخصوصاً على الفضاءات منتهية البعد، فقد تم تمثيلها بمصفوفة، ولهذا تعرضنا لها في الفصل السابع.

أضيف إلى هذه الطبعة (الثانية) بعض الملاحظات وفصل جديد عن تفاضل وتكامل المصفوفة، حالة بدراسة متتاليات ومتسلسلات المصفوفة والخواص التي تتمتع بها إلى المشتقة والتكامل لدالة المصفوفية، وتم التركيز على دوال المصفوفات القيمة الحقيقية.

ذُيِّل كل بند بتمارين شاملة ومتنوعة من حيث الصعوبة، كما ذُيِّل كل فصل بتمارين الفصل، هذه التمارين تعتبر مكملة لموضوعات هذا الكتاب من حيث التعريف وتوضيح الأفكار المعروضة.

الشكر والتقدير لزملائي أعضاء هيئة التدريس في الجامعات والمعاهد العليا الذين نبهوني إلى بعض الأخطاء المطبعية، والشكر كل الشكر إلى العاملين والمسؤولين في دار الكتاب الجديد المتحدة على اهتمامهم في نشر هذا الكتاب.

المؤلف

2012/10/1

الفصل الأول

أنظمة المعادلات الخطية

Systems of linear equations

يبدأ الجبر الخطي بدراسة أنظمة المعادلات الخطية التي تظهر في عدة مجالات منها الرياضيات والهندسة والاقتصاد والمجالات الفيزيائية... الخ.

ففي معظم هذه المجالات توجد تطبيقات لأنظمة المعادلات الخطية التي تحتوي على آلاف المتغيرات التي قد تحتاج إلى حاسب آلي لإيجاد حلها.

ونعني بحل نظام المعادلات الخطية هو مجموعة القيم للمتغيرات في هذا النظام والتي عند التعويض عنها في النظام تجعل كل معادلة من معادلات هذا النظام صحيحة.

في هذا الفصل نتعرف على بعض الإجراءات المنظمة لحل هذه المعادلات.

وتمتاز هذه الإجراءات بما يلي:

1) صلاحيتها للتطبيق على أي نظام من أنظمة المعادلات الخطية.

2) رغم أن الحاسب الآلي قد يكون أسهل تطبيقاً وأحسن نتائج لحل هذه الأنظمة إلا أن الأساليب التي نريد تعلمها لها استخدامات أخرى مهمة، علاوة على أنها أساس الفصول القادمة.

1.1 المعادلات الخطية في متغيرين

المعادلة التي على الشكل $ax + by = c$ تسمى معادلة خطية في متغيرين حيث إن a, b, c أعداد حقيقية و a, b لا يكونان صفراً في آن واحد.

مجموعة الحل للمعادلة الخطية في متغيرين هي مجموعة الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية التي تحقق المعادلة

مجموعة الحل هي $S = \{(x, y) : ax + by = c\}$

ويمثل رسم المعادلة الخطية خط مستقيم في المستوى

هذه الأزواج المرتبة (نقط في المستوى) تمثل رسم هذه المعادلة التي يكون خطاً مستقيماً

مثال 1

أوجد مجموعة الحل للمعادلة $2x + y = 12$ وارسم المعادلة

الحل

مجموعة الحل هي $\{(x, y) : 2x + y = 12\}$



حيث إن المعادلة الخطية تمثل خطاً مستقيماً،
فلرسم ذلك نحتاج إلى نقطتين فقط (أي نقطتين).

إذا كان $x = 0$ فإن $y = 12$

إذن النقطة $(0,12)$ تقع على هذا الخط المستقيم

إذا كان $y = 0$ فإن $x = 6$

إذن النقطة $(6,0)$ تقع على هذا الخط المستقيم

نوصل النقطتين بخط مستقيم ونمده على استقامته.

تمارين 1.1

في كل حالة من الحالات التالية وضح بيان (ارسم) المعادلة المعطاة

1) $4x - 2y = 3$

2) $-6x + 3y = 1$

3) $2x + 3y = 1$

4) $2x + y = 0$

5) $x - y = 2$

6) $5x + 7y = 3$

7) $x = 3$

8) $y = -4$

9) $x + y = 1$

10) $y = -x$

2.1 نظام معادلتين في متغيرين

هذا النظام يكون على الشكل:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

ومجموعة الحل لهذا النظام هي مجموعة الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية والتي تحقق المعادلتين

سوف نستخدم طريقة الحذف والتعويض الخلفي لحل هذا النظام.

هذه الطريقة تحتوي على إبدال هذا النظام بنظام أبسط منه وذلك بإجراء العمليات الآتية:

1) إبدال معادلة محل معادلة أخرى.

2) ضرب المعادلة في ثابت غير صفري.

3) تكوين معادلة جديدة من جمع مضاعفات إحدى المعادلتين وإضافتها إلى الأخرى

مثال 2

حل النظام:

$$2x + 3y = 2$$
$$5x + 6y = 11$$

الحـل

بضرب المعادلة الثانية في $\frac{-2}{5}$ والجمع يعطينا

$$2x + 3y = 2$$

$$\frac{-2x - \frac{12}{5}y = \frac{-22}{5}}{0 + \frac{3}{5}y = \frac{-12}{5}}$$

عند حل النظام $2x + 3y = 2$

$$\frac{3}{5}y = \frac{-12}{5}$$

من المعادلة الثانية نجد أن $y = -4$

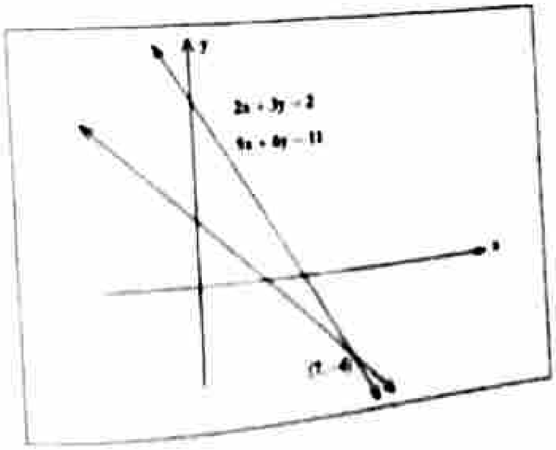
وبالتعويض الخلفي في المعادلة الأولى نجد أن

$$2x + 3(-4) = 2$$

أي أن $2x - 12 = 2$

وبذلك يكون $2x = 14$

$$x = 7$$



عند التحقق من (7, -4) في المعادلتين نجد أن (7, -4) تحقق المعادلتين

إذن النقطة (7, -4) هي الحل للنظام المعطى

نلاحظ أن مجموعة الحل في هذه الحالة تتكون من نقطة واحدة وهي نقطة تقاطع المستقيمين

مثـال 3

حل النظام

$$x - 2y = -1$$
$$2x - 4y = -8$$

الحـل

بضرب المعادلة الثانية في $-\frac{1}{2}$ والجمع نجد أن:

$$x - 2y = -1$$
$$\frac{-x + 2y = 4}{0 + 0 = 3}$$

وهذا يعطينا $3 = 0$ وهو أمر غير معقول

إذن النظام الأصلي ليس له حل

عندما لا يكون للنظام حل يسمى نظاماً غير متناسق **(Inconsistent)**

مثـال 4

حل النظام

$$2x + 3y = 12$$
$$4x + 6y = 24$$

الحـل

بضرب المعادلة الثانية في $-\frac{1}{2}$ والجمع نجد أن

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 12 \\ + \quad -2x & - & 3y & = & -12 \\ \hline 0 & + & 0 & = & 0 \end{array}$$

وهذا يعطينا أن $0 = 0$ وهي جملة صحيحة.

في هذه الحالة نلاحظ أن إحدى المعادلتين هي من مضاعفات المعادلة الأخرى

وهذا يعني هندسياً أن الخطين المستقيمين منطبقان.

نحتاج في هذه المرة إلى وسيط ولنكن t (أي عدد حقيقي).

إذا كان $y = t$ ، فإن $x = 6 - \frac{3}{2}t$

إذن مجموعة الحل

$$S = \left\{ \left(6 - \frac{3}{2}t, t\right) \mid t \text{ عدد حقيقي} \right\}$$

ويسمى ذلك بالحل العام

ملاحظة

عندما تكون مجموعة الحل نقطة واحدة أو أكثر من نقطة واحدة فإن النظام يكون متسقاً (consistent).

في المثال 2 الخطان المستقيمان يتقاطعان في نقطة واحدة وفي المثال 4 الخطان منطبقان.

إذاً طبيعة الحلول هي:

1) حل واحد.

2) عدد لا نهائي من الحلول.

3) لا حل.

تمارين 2.1

حل الأنظمة التالية:

1) $4x - 2y = 5$ ، $-6x + 3y = 1$

2) $x - 2y = 5$ ، $3x + 6y = 15$

3) $2x - 3y = 1$ ، $6x + 7y = 3$

4) $x + 3y = 2$ ، $x + 3y = 2$

5) $x + y = 4$ ، $2x + 3y = 9$

6) $x + y = 1$ ، $2x + 2y = 2$

7) $3x - 5y = 1$ ، $5x - 3y = 1$

8) $x - y = 1$ ، $2x - 2y = 6$

9) $x - 3y = 2$ ، $-x + 4y = 3$

10) $3x - y = 8$ ، $3x - y = 5$

3.1 أنظمة المعادلات الخطية في ثلاثة متغيرات

المعادلة التي على الشكل $ax + by + cz = d$ تسمى معادلة خطية في ثلاث متغيرات حيث إن a ، b ، c ، d أعداد حقيقية.

نريد استخدام طريقة الحذف مع التعويض الخلفي لحل أنظمة المعادلات الخطية في ثلاث متغيرات ونبدأ بدراسة مثال يقودنا إلى بعض الملاحظات

مثال 5

حل النظام:

$x + 2y - z = 9$ (1

$2x + y + z = 6$ (2

$3x - 2y - 2z = 2$ (3

الحل

بضرب المعادلة (2) في $\frac{-1}{2}$ وجمعها مع المعادلة (1) نحصل على

$$\frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z = 6$$

وبالضرب في $\frac{2}{3}$ نحصل على

$y - z = 4$ (4

وبضرب المعادلة (3) في $-\frac{1}{3}$ وجمعها مع المعادلة (1) نحصل على

$$\frac{8}{3}y - \frac{1}{3}z = \frac{25}{3}$$

وبالضرب في 3 نجد أن

$8y - z = 25$ (5

المعادلتان (4) و(5) تشكلان نظاماً من معادلتين في متغيرين.

$y - z = 4$ (4

$8y - z = 25$ (5

والتي تحل بالطريقة السابقة

وبضرب المعادلة (5) في $\frac{1}{8}$ والجمع ينتج أن

$$\frac{7}{8}z = \frac{7}{8}$$

ومن ذلك نجد أن

$-7z = 7$ أو $z = 1$ (6

إذن نحصل على النظام

$$x + 2y - z = 9$$
$$y - z = 4$$
$$z = -1$$

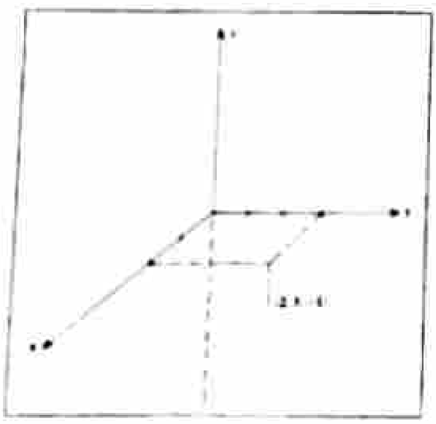
بالتعويض الخلفي نجد أن

$y = 3$

و

$x = 2$

إذن الحل هو $(2, 3, -1)$



من هذا المثال نلاحظ التعميم التالي:

1) إذا كانت المعادلة الأولى لا تحتوي على x، فإن تغييرها يتم بإحدى المعادلتين

التي لا يكون معامل x فيها صفراً ثم نستخدم المعادلة الأولى في حذف x من باقي المعادلات.

4) نستخدم هذه المعادلتين في متغيرين لنتخلص من y.

5) نستخدم التعويض الخلفي للحصول على الحل.

تمارين 3.1

حل الأنظمة التالية

1)
$$\begin{aligned} 2x + 3y - 3z &= 5 \\ x - 3y + 3z &= 2 \\ 4x - y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 5 \\ 3x - 2y + 2z &= 5 \\ 5x - 3y - z &= 16 \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 1 \\ -x + y - 5z &= 0 \\ 3x + 3y + z &= 4 \end{aligned}$$

4) أوجد قيمة a في النظام

$$\begin{aligned} ax + y - z &= 1 \\ x + ay - z &= 1 \\ x + y - az &= 1 \end{aligned}$$

بحيث يكون لهذا النظام إحدى الخواص التالية:

أ) حل وحيد

ب) لا حل

ج) عدد لا نهائي من الحلول

5) إذا كان

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z &= a \\ 2x + 3y - z &= b \\ 3x + y + 2z &= c \end{aligned}$$

فما هي الشروط التي تحققها a, b, c حتى يكون لهذا النظام حل؟

4.1 أنظمة المعادلات الخطية في n من المتغيرات

النظام

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

هو نظام يحتوي على m من المعادلات في n من المتغيرات

حل هذا النظام بطريقة الحذف والتعويض الخلفي يستهلك وقتاً وجهداً كبيراً من المعادلات، ولهذا السبب سنتعرف على طريقة تسهل علينا هذا العبء وتعتبر طريقة جيدة خصوصاً وأن هذه الطريقة متاحة الآن على نطاق واسع في معظم الحاسبات الآلية.

قبل تطبيق هذه الطريقة لا بد من التعرف على موضوع رياضي ذي أهمية في حد ذاته. هذا الموضوع هو المصفوفات والذي سنتناوله في الفصل القادم

تمارين 4.1

حل بطريقة الحذف الأنظمة التالية

1)
$$\begin{aligned} x + z + v &= 7 \\ x + y - v &= 4 \\ y - z - 2v &= -3 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} 2x - 4y + 7z + 4v - 5w &= 0 \\ 9x + 3y + 2z - 7v + 8w &= 0 \\ 5x + 2y - 3z + v + 3w &= 0 \\ 6x - 5y + 4z - 3v - 2w &= 0 \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} 3x - 2y - 3z - 2v &= -1 \\ x + y - z + v &= 8 \\ 2x + 3y + z &= 21 \\ 2x + 5y - 2z - v &= -3 \end{aligned}$$

تمارين الفصل الأول

حل الأنظمة الآتية وناقش طبيعة الحل في كل حالة

1) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -4x + 2y = 6 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x + 2y = -1 \\ y - x = 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ 3x - 7y = 11 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -6x + 9y = -15 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x + 4y - 2z = 9 \\ 5x + 5y + z = 16 \\ 5x + 4y - z = 10 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x - y + 3z = 3 \\ -x + y - 3z = 4 \\ 2x - 2y + 9z = 18 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -4x + 2y + 8z = -1 \\ 3x + 4y - 2z = 2 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x + 4y - 5z = 4 \\ x + y - z = 3 \\ 2x - 4y + 6z = 4 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x + 2y - z + w = 0 \\ x - y + 2z + w = 0 \\ 3x + y + 2z - w = 0 \end{cases}$

12) إذا كان لدينا نظام متجانس من المعادلات في n من المتغيرات وكان $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ حلاً، وكان $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ حلاً آخر لنفس النظام، فبرهن أن

$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

هو حل لنفس النظام أيضاً

الفصل الثاني

المصفوفات

Matrices

1.2 بعض المفاهيم الأساسية

وجدنا في الفصل الأول أن حل نظام المعادلات التي تحتوي على الكثير من المعادلات في الكثير من المتغيرات قد يستهلك وقتاً وجهداً، وهاهنا القارئ نتجه إلى طريقة أخرى سهلة ومفيدة. هذه الطريقة تحتاج إلى فكرة المصفوفات والتي بدورها تحتاج إلى قواعد وقوانين لفهمها. في هذا الفصل نحاول توضيح فكرة المصفوفات [illegible]

تعريف 1.1.2

لنفرض أن m و n عددان صحيحان موجبان.

الشكل المستطيل من الأعداد الحقيقية المرتبة في m من الصفوف و n من الأعمدة،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

يسمى مصفوفة (Matrix) من نوع m × n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

يسمى مصفوفة (Mtrix) من نوع $m \times n$.

كل عنصر من عناصر هذه المصفوفة يسمى **مدخلاً (entry)** فمثلاً a_{23} هو المدخل الذي في الصف الثاني والعمود الثالث.

إذا كان كل مدخل من مداخل المصفوفة يساوي العدد صفراً، فإن المصفوفة تسمى **المصفوفة الصفرية Zero matrix**، وإذا كان عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة، فإن المصفوفة في هذه الحالة تسمى **المصفوفة المربعة Square Matrix**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

القطر الرئيسي في المصفوفة المربعة هو الذي يتكون من المداخل التي يكون فيها $i = j$ (أي $(a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn})$). مجموع عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة المربعة A يسمى **أثر** A (tace of).

لنفرض أن A هي مصفوفة من نوع $m \times n$.

إذا حذفت بعض الصفوف أو بعض الأعمدة أو كليهما فإن المصفوفة الباقية تسمى **مصفوفة جزئية (Submatrix)** للمصفوفة A.

مثال 1 : ______________________________

إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 7 & \frac{3}{2} & 8 \end{bmatrix}$$

فإن

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 7 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

مصفوفة جزئية من A،

وكذلك

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

،

أيضاً مصفوفة جزئية من A.

لاحظ أن أي مصفوفة A هي مصفوفة جزئية من نفسها.

تعريف 2.1.2

لنفرض أن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{n1} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

مصفوفتان من نفس النوع.

المصفوفة A تساوي المصفوفة B$(A = B)$ إذا كان $a_{ij} = b_{ij}$ لكل i وj.

بمعنى آخر تتساوى المصفوفتان اللتان من نفس النوع إذا تساوت في كليهما المداخل المناظرة.

تمارين 1.2

1) إذا كانت

$$\begin{bmatrix} x + y & 2z + w \\ -y + x & w - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

فأوجد x, y, z, w.

2) إذا كانت

$$\begin{bmatrix} 2 & x & -1 \\ 3 & 2 & -8 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & -5 & -1 \\ 3 & 2 & -8 \\ 1 & z & 3 \end{bmatrix}$$

فأوجد x, y, z

3) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

فأوجد a_{31}, a_{21}, a_{11}

2 . 2 جمع المصفوفات Matrix addition

لنفرض أن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \text{ و } B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

مصفوفتان من نفس النوع.

جمع المصفوفتين B, A هو مصفوفة من النوع $m \times n$ كل مدخل فيها هو جمع المدخلين المناظرين في A وB، أي أن

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots\cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال 2 :

إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 6 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

فأوجد $A + B$.

الحـل

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 6 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+7 & 2+0 & 6+5 \\ 3+6 & 2+5 & 0+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 11 \\ 9 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

نلاحظ من تعريف جمع المصفوفات أنه لجمع أي مصفوفتين لا بد أن يكونا من نفس النوع.

تمارين 2.2

إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \\ 9 & 6 & -4 & 2 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ و } C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

فأوجد

1) $A + B$

2) $A + C$

3) $A - B + C$

4) $B + C$

5) $B - A$

6) $(A + B) + C$

إذا كانت C, B, A مصفوفات من نوع $m \times n$، فبرهن أن

7) $A + B = B + A$

8) $(A + B) + C = A + (B + C)$

9) $A + 0 = A$ حيث 0 هي المصفوفة الصفرية.

10) $A + (-A) = 0$

11) إذا كانت C, B, A, X مصفوفات من نوع $m \times n$، فأوجد X بدلالة C,B,A في المعادلة.

$$(X + A) + (B - C) = 3X + 4A$$

12) برهن أن $(A + B) + C = A + (B + C)$

2 . 3 ضرب عدد قياسي في مصفوفة

لنفرض أن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & \cdots\cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

مصفوفة وأن K عدد حقيقي.

ضرب العدد K في المصفوفة A يعطينا المصفوفة.

$$KA = \begin{bmatrix} Ka_{11} & \cdots\cdots\cdots & Ka_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ Ka_{m1} & \cdots\cdots\cdots & Ka_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال 3 :

إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن

$$3A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 18 \\ 3 & -6 & 12 \\ 15 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

ملاحظة

المصفوفة $(-1)A$ هي المصفوفة $-A$.

من هذه الملاحظة نستطيع تعريف طرح المصفوفات على أنه

$$A - B = A + (-1)B$$

مثال 4 :

أوجد

$$2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل

$$2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

نظرية 2 . 3 . 1

إذا كانت C, B, A مصفوفات من نوع $m \times n$ و K_1, K_2 عددين حقيقيين فإن

1) $A + B$ مصفوفة من نوع $m \times n$ (جمع المصفوفات عملية مغلقة)

2) $A + B = B + A$ (جمع المصفوفات عملية تبديلية)

3) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (جمع المصفوفات عملية تنسيقية)

4) توجد المصفوفة الصفرية 0 حيث $A + 0 = A$.

5) لكل مصفوفة A توجد مصفوفة $-A$ حيث $A + (-A) = 0$

6) K_1A مصفوفة من نوع $m \times n$ وإذا كان $K_1 = 1$، فإن $1A = A$.

7) $K_1(A + B) = K_1A + K_1B$

8) $(K_1 + K_2)A = K_1A + K_2A$

9) $K_1(K_2A) = (K_1K_2)A$

تمارين 3.2

إذا كانت

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

فأوجد

1) $2A$ 2) $-3B$

3) $2A - 3B$ 4) $-3A + B$

5) $3A + 2B$

إذا كانت A و B مصفوفتان من نوع $m \times n$ وكان b, a مقدارين ثابتين، فبرهن أن

6) $a(A + B) = aA + aB$ 7) $(a + b)A = aA + bA$

8) $a(bA) = (ab)A$

9) أوجد المصفوفة A إذا كان

$$A + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2A + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

10) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

فأوجد $-A, -3A, 2A$.

11) إذا كان $KA = 0$، فبرهن أن إما $K = 0$ أو $A = 0$.

4 . 2 ضرب المصفوفات Matries Multiplication

إذا كانت $A = [a_1\, a_2 \ldots\ldots a_n]$ هي مصفوفة من نوع $1 \times n$ و

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة من نوع $n \times 1$، فإن الضرب الداخلي للمصفوفتين B, A هو

$$A.B = [a_1 a_2 \ldots\ldots a_1] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots\ldots + a_1b_n$$

نلاحظ أن نتيجة الضرب الداخلي للمصفوفتين B, A هي عدد حقيقي.

مثال 5 :

$$[2 \quad -3 \quad 0] \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = 2.2 + (-3).(-1) + 0.4$$

$$= 4 + 3 + 0 = 7$$

تعريف 1.4.2

إذا كانت A_{mxp} هي مصفوفة من نوع mxp و b_{pxn} مصفوفة من نوع pxn فإن حاصل ضرب المصفوفتين AB في هذا الترتيب هو مصفوفة من نوع $m \times n$ مدخلها الذي في الصف i والعمود J يكون حاصل الضرب الداخلي للصف i في المصفوفة A والعمود J في المصفوفة B.

إذا كانت $C = AB$، فإن C_{ij} هو

$$C_{iJ} = [a_{i1}\, a_{i2} \ldots a_{ip}] \begin{bmatrix} b_{1J} \\ b_{2J} \\ \vdots \\ b_{pJ} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1J} + a_{i2}b_{2J} + \ldots + a_{ip}b_{pJ}$$

من الملاحظ أن ضرب المصفوفات معرف بشرط أن يكون عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى يساوي عدد الصفوف في المصفوفة الثانية:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mp} \end{bmatrix}_{mxp} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2j} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \ldots & b_{pJ} & \ldots & b_{pn} \end{bmatrix}_{pxn}$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \ldots & C_{1J} & \ldots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \ldots & C_{2J} & \ldots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{i1} & C_{i2} & \ldots & C_{iJ} & \ldots & C_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \ldots & C_{mJ} & \ldots & C_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

مثال 6 :

أوجد AB إذا كان

$$B = \begin{bmatrix} -10 & 15 & 0 & 1 \\ 4 & -6 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & -5 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3} \begin{bmatrix} -10 & 15 & 0 & 1 \\ 4 & -6 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & -5 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{3\times4}$$

$$\begin{bmatrix} [2\ 3-1]\begin{bmatrix} -10 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} & [2\ 3-1]\begin{bmatrix} 15 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} & [2\ 3-1]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} & [2\ 3-1]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ [2\ 1\ 0]\begin{bmatrix} -10 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} & [2\ 1\ 0]\begin{bmatrix} 15 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} & [2\ 1\ 0]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} & [2\ 1\ 0]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ [-1\ 2\ 2]\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} & [-1\ 2\ 2]\begin{bmatrix} 15 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} & [-1\ 2\ 2]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} & [-1\ 2\ 2]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 14 & 8 & -\frac{3}{2} \\ -16 & 24 & 1 & 1 \\ 10 & -31 & -8 & -4 \end{bmatrix}_{3\times4}$$

- لاحظ أن BA غير معرف لأن عدد الأعمدة في B (4 أعمدة) لا يساوي عدد الصفوف في A (3 صفوف).

مثال 7 :

إذا كانت :

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

فأوجد AB وكذلك BA.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لاحظ في هذا المثال أن المصفوفة $A \neq 0$ والمصفوفة $B \neq 0$، ولكن $AB = 0$ وهذا لا يحدث في حالة الأعداد الحقيقية.

الآن :

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

لاحظ أيضاً في أن هذا المثال أن $AB \neq BA$

نظرية 1.4.2

إذا كانت C, B, A مصفوفات وكان K عدد حقيقي، فإن

1) AB مصفوفة بشرط مراعاة الأبعاد (عملية الضرب عملية مغلقة)

2) $(AB)C = A(BC)$ (عملية ضرب المصفوفات عملية تنسيقية)

3) $A(B + C) = AB + AC$ (توزيع الضرب على الجمع من اليسار)

4) $(B + C)A = BA + CA$ (توزيع الضرب على الجمع من اليمين)

5) $K(AB) = (KA)B = A(KB)$

6) $AB \neq BA$ بصفة عامة (ضرب المصفوفات عملية غير تبديلية)

البرهان

1) لنفرض أن:

$$A = [a_{iJ}]_{m \times n} \text{ و } B = [b_{JK}]_{n \times p}$$

من تعريف ضرب المصفوفات نجد أن:

$$AB = \left[\sum_{J=1}^{n} a_{iJ} b_{Jk}\right]_{m \times p}$$

وهذه مصفوفة من نوع $m \times p$:

2) إذا فرضنا كذلك أن

$$C = [C_{K\ell}]_{p \times q}$$

فإن:

$$AB = \left[\sum_{J=1}^{n} a_{iJ} b_{Jk}\right]_{m \times p}$$

وأن:

$$(AB)C = \left[\sum_{K=1}^{p}\left(\sum_{J=1}^{n} a_{iJ} b_{Jk}\right) C_{K\ell}\right]_{m \times q}$$

$$= \left[\sum_{K=1}^{p}\sum_{J=1}^{n} a_{iJ} b_{Jk} C_{K\ell}\right]_{m \times q}$$

الآن:

$$BC = \left[\sum_{K=1}^{p} b_{Jk} C_{K\ell}\right]_{m \times q}$$

و:

$$(AB)C = \left[\sum_{J=1}^{n} a_{iJ}\left(\sum_{K=1}^{p} b_{JK} C_{K\ell}\right)\right]_{m \times q}$$

$$= \left[\sum_{J=1}^{n}\sum_{K=1}^{p} a_{iJ} b_{Jk} C_{K\ell}\right]_{m \times q}$$

والآن:

$$\sum_{K=1}^{p}\sum_{J=1}^{n} a_{iJ} b_{Jk} C_{K\ell} = \sum_{J=1}^{n}\sum_{K=1}^{p} a_{iJ} b_{Jk} C_{K\ell}$$

وذلك يؤدي إلى أن:

$$(AB)C = A(BC)$$

3) لنفرض أن:

$$A = [a_{iJ}]_{m \times n} \text{ و } B = [b_{Jk}]_{n \times q} \text{ و } C = [c_{Jk}]_{n \times q}$$

ومن ذلك نجد أن:

$$B + C = [b_{Jk} + c_{Jk}]_{n \times q}$$

و:

$$A(B + C) = \left[\sum_{J=1}^{n} a_{iJ}(b_{Jk} + c_{Jk})\right]_{m \times q}$$

$$= \left[\sum_{J=1}^{n} (a_{iJ} b_{Jk} + a_{iJ} C_{Jk})\right]$$

$$= \left[\sum_{J=1}^{n} a_{iJ} b_{Jk}\right] + \left[\sum_{J=1}^{n} a_{iJ} C_{Jk}\right]$$

$$= AB + AC$$

4) يتم برهنت (4) بنفس الإسلوب الذي تمت به برهنت الجزء (3).

5) إذا كانت:

$$A = [a_{iJ}]_{m \times n} \text{ و } B = [b_{Jk}]_{n \times q}$$

فإن:

$$AB = \left[\sum_{J=1}^{n} a_{iJ} b_{Jk}\right]_{m \times q}$$

و:

$$K(AB) = \left[\sum_{J=1}^{n} K a_{iJ} b_{Jk}\right]_{m \times q}$$

$$= \left[\sum_{J=1}^{n} (K a_{iJ}) b_{Jk}\right] = (KA)B$$

$$= \left[\sum_{J=1}^{n} a_{iJ} (K b_{Jk})\right] = A(Kb)$$

6) انظر المثال 7.

تمارين 4.2

1) إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 4}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}_{4 \times 3}$$

فأوجد AB.

2) إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

فأوجد كل المصفوفات B من نوع 2 × 2 والتي تحقق $AB = BA$.

3) إذا كانت:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

فأوجد CA, BC, B^2, AC, AB.

4) وضح أن $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ تحقق المعادلة:

$$A^2 - 2A - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6) برهن أنه إذا كان $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B$، فإن $AB = BA$.

7) وضح أنه إذا كانت:

أ) $A = \begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix}$، فإن $A^2 = 0$

ب) $A = \begin{bmatrix} a & a \\ 1-a & 1-a \end{bmatrix}$، فإن $A^2 = A$

8) إذا كانت:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

فأوجد:

أ) AB ب) BA ج) AC د) CA

9) وضح إنه إذا كان $AC = CA$ و$BC = CB$، فإن:

$$(AB + BA)C = C(AB + BA)$$

10) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، فأوجد A^n.

11) إذا كانت A مصفوفة من نوع $m \times n$ و B مصفوفة من نوع $n \times p$ و C مصفوفة من نوع $P \times q$، فبرهن أن

$$(AB)C = A(BC)$$

12) برهن أن:

$$A(B + C) = AB + AC$$

13) إذا كانت C, B, A مصفوفات من نوع $n \times n$ وكان $AC = CA$ و $CB = BC$، فبرهن أن

$$(AB)C = C(AB)$$

5 . 2 مصفوفات خاصة

1 ـ المصفوفة المحايدة Identity Matrix

هي المصفوفة المربعة التي تحتوي على الأعداد 1 كمداخل في القطر الرئيسي والأعداد 0 في كل مدخل آخر. ويرمز لها بالرمز I.

على سبيل المثال.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هما المصفوفتان المحايدتان من نوع 2×2 و 3×3 على الترتيب.

نرمز للمصفوفة المحايدة من نوع $n \times n$ بالرمز I_n. ففي المثال السابق لدينا I_3, I_2 على الترتيب.

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

مصفوفة من نوع $n \times n$، فإن

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

كذلك $AI = A$

أي أن $AI = IA = A$

2 ـ المصفوفات المثلية Triangular Matrices

المصفوفة المربعة من نوع $n \times n$ والتي فيها كل المداخل $a_{ij} = 0$ عندما يكون $i < J$ تسمى **مصفوفة المثلث السفلي** Lower triangular Matrix

المصفوفة المربعة من نوع $n \times n$ والتي فيها كل المداخل $a_{ij} = 0$ عندما يكون $i > J$ تسمى **مصفوفة المثلث العلوي** Upper triangular Matrix.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

مصفوفة مثلث سفلي

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & .. & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & .. & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & .. & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & a_{nn} \end{bmatrix}$$

مصفوفة مثلث علوي

3 ـ المصفوفة القطرية Diagonal Matrix

هي المصفوفة من نوع $n \times n$ والتي مداخلها $a_{ij} \neq 0$ حيث $i = J$ وباقي المداخل صفرية.

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

مصفوفة قطرية

4 ـ مصفوفات متساوية الفعالية (جامدة) Idempotent Matrices

المصفوفة المربعة من نوع $n \times n$ تسمى مصفوفة متساوية الفعالية إذا وإذا كان فقط $A^2 = A$.

هذه المصفوفات:

أ) I ب) 0 ج) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

كلها أمثلة على المصفوفة متساوية الفعالية.

5 ـ المصفوفة المربعة A تسمى مصفوفة عديمة القوى Nilpotent بقوة n إذا كان $A^n = 0$ ولكن $A^{n-1} \neq 0$.

تمارين 5.2

1) إذا كانت D مصفوفة قطرية من نوع $m \times m$ مداخلها على القطر الرئيسي متساوية وتساوي K، فبرهن أن $DA = KA$ حيث A أي مصفوفة من نوع $m \times n$.

2) إذا كانت B, A مصفوفتي مثلث علوي، فبرهن أن $A + B$ مصفوفة مثلث علوي أيضاً.

3) إذا كانت B, A مصفوفتي مثلث سفلي، فبرهن أن AB مصفوفة مثلث سفلي أيضاً.

4) إذا كانت B, A مصفوفتين قطريتين، فبرهن أن $A + B$ وAB مصفوفتين قطريتين.

5) برهن أن ضرب المصفوفات القطرية المربعة عملية تبديلية.

6) حدد المصفوفات القطرية A التي تكون جامدة.

7) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فوضح أن $A^2 = A$

8) إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

فوضح أن A مصفوفة جامدة.

9) لنفرض أن:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

وضح أن $(A - \lambda I)^3 = 0$

2 . 6 معكوس المصفوفة المربعة Inverse of a square Matrix

قد يتساءل الطالب الآن

هل يوجد لكل مصفوفة مربعة A معكوس ضربي A^{-1} حيث $AA^{-1} = A^{-1}A = I$؟

إذا وجدت المصفوفة A^{-1} للمصفوفة A، فإن A^{-1} تسمى المعكوس الضربي للمصفوفة A.

مثال 8:

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

فأوجد A^{-1}.

الحـل

لنفرض أن:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

إذن:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 2a + 3c & 2b + 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إذن:

$$a + 2c = 1$$

$$2a + 3c = 0$$

ومن ذلك $c = 2$ و $a = -3$

كذلك:

$$b + 2d = 0$$

$$2b + 3d = 1$$

ومن ذلك: $d = -1$ و $b = 2$

إذن:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

مثال 9:

أوجد معكوس المضوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ إن وجدت.

الحـل

لنفرض أن:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2a + c & 2b + d \\ 4a + 2c & 4b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ومن ذلك نجد أن:

$$2a + c = 1 \qquad 2b + d = 0$$

$$4a + 2c = 0 \quad \text{و} \quad 4b + d = 1$$

نلاحظ أن النظامين غير متناسقين ولهذا فإنه لا يوجد حل.

إذن A^{-1} غير موجودة.

إذا كان للمصفوفة المربعة A معكوس، فإننا نقول بأن المصفوفة A قابلة للانعكاس (invertible). وإذا كانت غير قابلة للانعكاس (أي ليس لها معكوس)، فإننا نقول بأن المصفوفة A مصفوفة شاذة (Singular).

الطريقة السابقة لإيجاد معكوس المصفوفة A قد تكون صعبة عندما تكون المصفوفة A من نوع $n \times n$ حيث $n > 2$ ولذلك نلجأ إلى طريقة أخرى تكون أكثر فعالية.

إذا كانت A مصفوفة قابلة للانعكاس فلإيجاد معكوسها نتبع ما يلي:

1) نكون مصفوفة جديدة على شكل $[A : I]$.

2) نحاول الوصول إلى الشكل $[I : B]$ وذلك بالقيام بعمليات مسموح بها.

3) المصفوفة B في الشكل $[I : B]$ هي معكوس المصفوفة A، أي أن $B = A^{-1}$.

مثال 10 :

أوجد معكوس المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

إن وجدت.

الحل

$$[A : I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 + R_3 = R_3]{R_1 - \frac{1}{2}R_2 = R_2}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 = R_3 - 6R_2}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 = 4R_2 + R_3}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{4R_1 + R_3 = R_1}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 4 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - R_2 = R_1}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 = -\frac{1}{4}R3]{R_1 = \frac{1}{8}R_1, R_2 = \frac{1}{2}R_2}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

إذن:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

للتحقق من عملك، أوجد AA^{-1} والتي لا بد أن تساوي I_3.

نظرية 1 . 6 . 2

إذا حولت المصفوفة $[A : I]$ وذلك بعمليات على الصفوف إلى المصفوفة $[I : B]$ فإن المصفوفة B هي معكوس المصفوفة A (أي أن $B = A^{-1}$). إذا تحصلنا على صف أو أكثر من الصفوف الصفرية على يسار الخط العمودي، فإن A^{-1} غير موجودة، أي أن A غير قابلة للانعكاس.

نظرية 2 . 6 . 2

إذا كانت المصفوفة A قابلة للانعكاس، فإن معكوس A تكون مصفوفة وحيدة.

البرهان

لنفرض أن B وC مصفوفتين حيث أن $BA = I$ و $AC = I$.

من قانون التنسيق نجد أن

$$(BA)C = B(AC)$$

أي أن:

$$IC = BI$$

وبذلك تكون: $C = B$.

نظرية 3 . 6 . 2

إذا كانت A قابلة للانعكاس، فإن المصفوفة A^{-1} تكون قابلة للانعكاس أيضاً و

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

نظرية 4 . 6 . 2

إذا كانت B, A مصفوفتين قابلتين للانعكاس، فإن المصفوفة AB قابلة للانعكاس، ويكون:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

البرهان

بما أن:

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1}$$
$$= A(IA^{-1}) = AA^{-1} = I$$

وكذلك:

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}(IB)$$
$$= B^{-1}B = I$$

فإن $B^{-1}A^{-1}$ هي معكوس AB.

أي أن $(AB)^{-1} = B^{-1}B^{-1}$.

من النظرية السابقة (4.6.2) نستطيع أن نستنتج أنه إذا كانت:

$$A_1, ..., A_k$$

مصفوفات قابلة للانعكاس، فإن

$$(A_1A_2 ... A_K)^{-1} = A_k^{-1}A_{K-1}^{-1} ..... A_2^{-1}A_1^{-1}$$

قد يحصل أن يكون $AB = AC$ ولكن $B \neq C$، فعلى سبيل المثال إ
كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ و } C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}.$$

هذا لا يحصل أبداً إذا كانت A قابلة للانعكاس، والنظرية التالية توض
ذلك.

نظرية 5.6.2

إذا كانت A مصفوفة قابلة للانعكاس وكانت B و C مصفوفتين
فإن

1) $AB = AC$ يؤدي إلى أن $B = C$.

2) $BA = CA$ يؤدي إلى أن $B = C$.

البرهان

إذا كانت A مصفوفة قابلة للانعكاس، فإن ذلك يعني وجود المصفوفة A^{-1}.

1) $AB = AC$ بضرب هذه المعادلة في A^{-1} على اليسار، نجد أن

$$(A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C$$

$$IB = IC$$

$$B = C$$

2) $BA = CA$ بضرب هذه المعادلة في A^{-1} على اليمين، نجد أن

$$B(AA^{-1}) = C(AA^{-1})$$

$$BI = CI$$

$$B = C$$

تمارين 6.2

1) أوجد A^{-1} إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{bmatrix}$$

2) برهن أنه إذا كانت B, A مصفوفتين قابلتين للانعكاس و$AB = BA$، فإن $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3) إذا كانت A مصفوفة جامدة و $A \neq I$، فبرهن أن A لا بد أن تكون مصفوفة شاذة.

4) إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فوضح أن A مصفوفة قابلة للانعكاس وأوجد A^{-1}.

5) إذا كانت A مصفوفة من نوع $n \times n$ حيث إ $(I - A)(I + A) = 0$، فوضح أن A مصفوفة قابلة للانعكاس وأ $A = A^{-1}$.

6) أوجد A^{-1} وحل النظام $AX = b$ إذا كان

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

7) إذا كانت A مصفوفة قطرية قابلة للانعكاس من نوع $n \times n$، فأوج A^{-1}.

8) وضح أن أي مصفوفة عديمة القوى A تكون غير قابلة للانعكاس.

9) إذا كانت A مصفوفة مربعة وأن $A^2 - 8A + 2I = 0$، فوضح أن قابلة للانعكاس وأن

$$A^{-1} = 4I - \frac{1}{2}A$$

10) أوجد مصفوفتين A و B من نوع 2×2 بحيث أن $AB = 0$ ولك $BA \neq 0$.

2 . 7 متعدد الحدود للمصفوفات Polynomial of Matrices

نعلم أن متعدد الحدود في x على الشكل

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

والأعداد $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ هي المعاملات.

n هي درجة متعدد الحدود بشرط أن $a_n \neq 0$.

لنفرض أن A مصفوفة من نوع $n \times n$.

نستطيع وضع A بدلاً من x في متعدد الحدود $p(x)$ فنحصل على

$$P(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I$$

بحيث تكون I المصفوفة المحايدة من نوع $n \times n$.

لهذا نستطيع أن نقابل أحادياً بين مجموعة كل متعددات الحدود في المتغير x مع مجموعة كل متعددات الحدود للمصفوفات A.

على الرغم من أن متعدد الحدود $P(x)$ بدرجة n يكون له بالضبط عدد n من الجذور، إلا أن ذلك ليس صحيحاً في حالة متعدد الحدود للمصفوفات وأكبر دليل على ذلك متعدد الحدود $A^2 - I = 0$ عندما تكون A من نوع 2×2.

بالاضافة للحليين.

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

فإن $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ حل كذلك.

هذا يعني أن متعدد الحدود للمصفوفات $P(A)$ بدرجة n يكون له على الأقل عدد n من الجذور.

تمارين 2 . 7

1) أوجد كل المصفوفات التي تحقق.

أ) $A^2 - 5A + 7I = 0$ حيث A من نوع 2×2.

ب) $A^3 - I_n = 0$ حيث A من نوع $n \times n$.

2) أوجد كل المصفوفات القطرية من نوع $n \times n$ والتي تحقق $P(A) = 0$ حيث درجة P هي n.

3) وضح أن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

حل لمتعدد الحدود $A^2 - 5A + 7I = 0$.

4) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فأوجد $f(A)$ حيث $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

5) إذا كانت $B = P^{-1}AP$، وكان

$$f(A) = a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0$$

فبرهن أن $f(B) = 0$.

تمارين الفصل الثاني

1) أوجد معكوس المصفوفة A إذا كانت:

أ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

ب) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

ج) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

د) $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2) برهن النظرية 1.4.2

3) لنفرض أن المصفوفة A والمصفوفة B قابلتين للانعكاس، فبرهن أن $AB = I$ يؤدي إلى أن $BA = I$.

هذا التمرين يؤكد أنه للتحقق من أن B معكوس A يكفي إيجاد AB لكي يكون الناتج المصفوفة المحايدة I.

4) إذا كانت A مصفوفة قابلة للانعكاس و $A^2 - KA + I = 0$ حيث K مقدار ثابت، فأوجد A^{-1}

5) إذا كانت $A \neq 0$ و $B \neq 0$ مصفوفتين و $AB = 0$، فبرهن أن كلا من B, A غير قابلتين للانعكاس.

6) برهن أنه إذا كانت A مصفوفة قابلة للانعكاس و c عدد غير صفري، فإن المصفوفة cA تكون قابلة للانعكاس و

$$(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$$

7) إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

فأوجد A^{-1} حيث $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$.

8) عمم نتيجة التمرين (9) لإيجاد معكوس المصفوفة القطرية من نوع $n \times n$.

9) إذا كان $AB = A$ و $BA = B$، فبرهن أن كلا من B, A مصفوفة متساوية الفعالية.

10) وضح أن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

مصفوفة عديمة القوى بقوة 3.

11) إذا كانت A و B و C مصفوفات مربعة بحيث أن $AB = I$ و $CA = I$، فبرهن أن $B = C$.

12) إذا كان $A^2 = I$، فبرهن أن

$$(A - I)(I + A) = 0$$

13) إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين بحيث تكون A قابلة للانعكاس فبرهن أن:

$$(A + B)A^{-1}(A - B) = (A - B)A^{-1}(A + B)$$

14) إذا كان:

$$P(A) = a_nA^n + \dots + a_0I = 0$$

وكانت:

$$B = D^{-1}AD \text{ و } B^n = D^{-1}A^nD$$

فإن: $P(B) = 0$.

15) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{bmatrix}$$

فوضح أن:

$$A^n = \begin{bmatrix} \cosh(nx) & \sinh(nx) \\ \sinh(nx) & \cosh(nx) \end{bmatrix}$$

حيث n عدد صحيح موجب.

16) إذا كانت A و B مصفوفتان حيث أن $AB = BA$، وأن $H^2 = B$ و A^{-1} موجودة، فبرهن أن:

$$(A^{-1}HA)^2 = B$$

17) إذا كانت A و B مصفوفتان متماثلتان حيث $AB = BA$، فإن كانت A^{-1} و B^{-1} موجودتان، فبرهن أن.

أ) $A^{-1}B$ ب) AB^{-1} ج) $A^{-1}B^{-1}$

كلها مصفوفات متماثلة.

18) إذا كانت A و B مصفوفتان قابلتان للانعكاس، فبرهن أن $AB = BA$ إذا وإذا كان فقط $AB^{-1} = B^{-1}A$.

الفصل الثالث

المحددات
Determinants

ليس من السهل تعريف محددة مصفوفة ولكننا نتعرف على محددة المصفوفة من خواصها.

المحددة هي دالة من فضاء المصفوفات من نوع $n \times n$ إلى مجال الأعداد الحقيقية (إذا كانت مداخل المصفوفة أعداد حقيقية) أو إلى مجال الأعداد المركبة (إذا كانت مداخل المصفوفة أعداد مركبة).

يرمز لهذه الدالة (المحددة) بالرمز det أو | | وسوف نستخدم الرمز | A | للدلالة على محددة المصفوفة **A**.

أي أن: $|\ | : M_{n \times n} \dashrightarrow \mathbf{R}(\mathbf{C})$

1 . 3 بعض التعريفات والقواعد

في حالة المصفوفة من نوع 2×2 فإن هناك قاعدة سهلة وثابتة للحصول على محددتها، على سبيل المثال.

إذا كانت: $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

فإن: $$|\mathbf{A}| = ad - bc$$

مثال 1:

إذا كانت: $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

فإن: $|A| = 3(2) - (4) | = 2$

محورة المصفوفة Transpose of a Matrix

إذا كانت A مصفوفة من نوع $m \times n$، فإن المصفوفة من نوع $n \times m$ والناتجة من تغيير الصفوف بالأعمدة في المصفوفة A تسمى محورة المصفوفة A ويرمز لها بالرمز A^T.

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

فإن:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots\cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال 2:

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

فإن:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

خواص المحورة

لمحورة المصفوفة خواص تساعد كثيراً في فهم وإيجاد محورة مصفوفة قد تكون أكثر تعقيداً.

نذكر هذه الخواص في النظرية التالية:

نظرية 1.1.3

إذا كانت B, A مصفوفتان يكون لهما النوع الذي يتمشى مع العملية المذكورة وكان K عدد، فإن

1) $(A^T)^T = A$

2) $(A + B)^T = A^T + B^T$

3) $(AB)^T = B^T A^T$

4) $(KA)^T = KA^T$

البرهان

من السهل برهنت الخواص 1، 2، 4. نتركها للقارىء كتمارين. لبرهنة

الخاصية الثالثة، لا بد أن نبرهن أن المصفوفتان $(AB)^T$ و B^TA^T لهما نفس النوع ولهما نفس العنصر C_{iJ}.

إذا كانت A من النوع $m \times n$ و B من النوع $n \times P$، فإن المصفوفة AB من النوع $m \times P$ وبذلك تكون المصفوفة $(AB)^T$ من النوع $P \times m$.

الآن المصفوفة B^T من نوع $P \times n$ والمصفوفة A^T من نوع $n \times m$ وبذلك فإن المصفوفة B^TA^T تكون من النوع $P \times m$.

إذن المصفوفتان $(AB)^T$ و B^TA^T لهما نفس النوع.

العنصر C_{iJ} في $(AB)^T$ هو العنصر C_{Ji} في AB والذي ينتج من الضرب الداخلي للصف J في المصفوفة A في العمود i في المصفوفة B.

إذن:

$$C_{iJ} = a_{J1}b_{1i} + a_{J2}b_{2i} + \dots + a_{Jn}n_{ni}$$

الآن العنصر C_{iJ} في B^TA^T هو حاصل الضرب الداخلي للصف i في المصفوفة B^T في العمود J في المصوفة A^T.

إذن C_{iJ} في B^TA^T هو حاصل الضرب الداخلي للعمود i في B في الصف J في المصفوفة A، أي أن:

$$C_{iJ} = b_{1i}a_{J1} + b_{2i}a_{J2} + \dots + b_{ni}a_{Jn}$$

وهذا يعني أن C_{iJ} في كلاهما متساوي.

الجدير بالملاحظة هو أنه إذا كانت A مصفوفة قابلة للانعكاس، فإن محورتها A^T تكون مصفوفة قابلة للانعكاس أيضاً و $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

وهذا واضح من أن:

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T$$
$$= I^T = I$$

كذلك:

$$(A^{-1})^TA^T = (AA^{-1}) = I^T = I$$

والذي ينتج أن:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

محددة المصفوفة من نوع 3 × 3

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

مصفوفة من نوع 3 × 3، فإن:

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

مثال 3:

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -4 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

فإن

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -4 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ -4 & -3 \\ 2 & 0 \end{matrix}$$

$$= 1(-3)(4) + (-1)(3)(2) + (-2)(4)(0)$$

$$-(-2)(-3)(2) - 1(3)(0)(-1)(-4)(4)$$

$$= -12 - 6 + 0 - 12 - 0 - 16$$

$$= -46$$

الفك إلى عوامل مرافقة Cofactors Expansion

تعريف 1.1.3

إذا كانت A مصفوفة من نوع n × n، فإن المصفوفة الجزئية M_{ij} والتي من نوع $(n-1)(n-1)$ والمتكونة من حذف الصف i والعمود j في المصفوفة A تسمى بالمصفوفة الصغرى (Minor) للعنصر a_{ij}.

مثال 4:

إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

فإن

$$M_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} ، M_{32} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}$$

تعريف 2.1.3

العامل المرافق للعنصر a_{ij} هو حاصل ضرب $(-1)^{i+j}$ في محددة المصفوفة الصغرى للعنصر a_{ij}.

يرمز للعامل المرافق للعنصر a_{ij} بالرمز A_{ij}.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

مثال 5:

أوجد A_{11}, A_{31}, A_{32} للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -4 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

الحـل

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -12$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -9$$

$$A_{32} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -1(-5) = 5$$

استخدام العوامل المرافقة في إيجاد محددة المصفوفة من نوع n × n

إذا كانت A مصفوفة من نوع n × n، فإن:

1) فك المحددة باستخدام الصف 1 هو:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

بصفة عامة يكون فك المحددة باستخدام الصف i هو:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + .. + a_{in}A_{in}$$

$$= \sum_{J=1}^{n} a_{iJ}A_{iJ}$$

2) فك المحددة باستخدام العمود 1 هو:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots\dots + a_{n1}A_{n1}$$

بصفة عامة يكون:

$$|A| = a_{1J}A_{1J} + a_{2J}A_{2J} + \dots\dots + a_{nJ}A_{nJ}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{iJ}A_{iJ}$$

وهذا يعني فك المحددة باستخدام العمود J.

ملاحظة:

حيث أن عناصر الصف أو العمود تضرب في العوامل المرافقة لها، يستحسن لإيجاد محددة مصفوفة من نوع n × n اختيار الصف أو العمود الذي يحتوي على أكبر عدد من المداخل الصفرية.

مثال 6:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & -3 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث أن العمود الثاني يحتوي على ثلاثة أصفار، فالأحسن اختيار العمود الثاني.

$$|A| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42}$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}, A_{22} = (-1)^4 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{bmatrix}, A_{42} = (-1)^6 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 0A_{12} + 0A_{22} + (-2)A_{32} + 0A_{42}$$

$$= -2A_{32}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left[0\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 2(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}\right]$$

$$= 2[0 + 24 + 0]$$

$$= 2(24) = 48$$

نظرية 3 . 1 . 3

إذا كانت A مصفوفة مثلثية من نوع n × n (مصفوفة مثلث علوي، مصفوفة مثلث سفلي، أو مصفوفة قطرية)، فإن محددة A هي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي . أي أن

$$|A| = (a_{11})(a_{22}) \dots (a_{nn})$$

مثال ٦ :

إذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

فإن :

$$|A| = 2(4)(6) = 48$$

تمارين 3 . 1

1) أوجد محددة المصفوفات التالية

أ) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$

2) أوجد محددة ما يلي :

أ) $\begin{bmatrix} 1 & b & c & +a \\ 1 & a & b & +c \\ 1 & c & 1 & +b \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

3) إذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

فعلى الرغم من أن AB ≠ BA، فبرهن أن $|AB| = |BA|$.

4) أوجد قيم a إذا كان :

$$\begin{vmatrix} a & a \\ 4 & 2a \end{vmatrix} = 0$$

5) حل النظام :

$$2x + y = 7$$

$$3x - 5y = 4$$

6) إذا كانت A مصفوفة قابلة للانعكاس، فبرهن أن $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

7) أوجد قيم x التي تجعل المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{bmatrix}$$

شاذة.

8) برهن أن محددة مصفوفة المثلث العلوي تساوي حاصل ضرب المداخل التي في القطر الرئيس

9) أوجد محددة المصفوفة A إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

10) تحقق من أن:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (x - y)(y - z)(z - x)$$

11) أوجد:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & 1 & x & x^2 \\ x^2 & x^3 & 1 & x \\ x & x^2 & x^3 & 1 \end{vmatrix}$$

12) برهن أن: $(A^T)^T = A$.

13) برهن أن: $(A + B)^T = A^T + B^T$.

14) برهن إنه إذا كانت: $A^2 = 0 , A = A^T$.

فإن $A = 0$.

15) برهن أن $|\lambda A| = \lambda^n |A|$ عندما تكون A مصفوفة من نوع $n \times n$.

3 . 2 خواص المحددات

1) تتغير إشارة المحددة عند تغيير صفين: أي إذا كانت B هي مصفوفة ناتجة ... $|A|$ ...

2) إذا تساوى صفان في أي مصفوفة A من نوع $n \times n$، فإن $|A| = 0$.

3) جمع مضاعف أي صف إلى صف آخر لا يغير قيمة المحددة. أي إذا كانت B ناتجة من أن أحد صفوفها استبدل بجمع مضاعف صف إلى آخر في المصفوفة A، فإن $|B| = |A|$.

4) إذا ضرب أي صف من صفوف المصفوفة A في عدد λ، فإن محددة المصفوفة الناتجة تساوي λ ضرب محددة المصفوفة A.

مثال 8 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & 5 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

5) إذا كان للمصفوفة $A_{n\times n}$ أي صف صفري، فإن $|A| = 0$.

6) إذا كانت B, A مصفوفتين من نوع $n \times n$، فإن:

$$|AB| = |A||B|$$

7) محددة المصفوفة المحايدة من نوع $n \times n$ تساوي 1؛ أي أن:

$$|I| = 1$$

نستنتج من هذه القاعدة أنه إذا كانت A قابلة للانعكاس، فإن

$$1 = |I| = |AA^{-1}| = |A||A^{-1}|$$

ومن ذلك:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

8) $|A| = |A^T|$

من هذه الخاصية نستنتج أن الإجراء الذي يصح حول الصفوف في إيجاد المحددة يصح أيضاً حول الأعمدة.

نظرية 1 . 2 . 3

إذا كانت المصفوفة A قابلة للانعكاس، فإن $|A| \neq 0$.

البرهان

حيث إن A قابلة للانعكاس، فتوجد A^{-1} حيث إن $A^{-1}A = I$.

$$|AA^{-1}| = |I|$$

$$|A||A^{-1}| = 1$$

ومن ذلك نجد أن: $|A| \neq 0$.

تمارين 2 . 3

أوجد محددة المصفوفات التالية:

1) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$
2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix}$
4) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 8 & -7 & 9 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$
6) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

7) إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

فأوجد $|A|$ وكذلك $|A^{-1}|$.

8) برهن أنه إذا كانت A مصفوفة من نوع $n \times n$ وكانت a كمية قياسية، فإن:

$$|aA| = a^n |A|$$

9) أوجد A^{-1} إن وجدت للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10) أوجد كل المصفوفات A من نوع 2×2 والتي تحقق $A = A^{-1}$.

11) أوجد كل المصفوفات A من نوع 2×2 والتي تحقق $A^{-1} = A^T$.

12) ما هي علاقة كل من:

$$|2A|, |-A|, |A^2| \text{ إلى } |A|$$

13) إذا كانت A مصفوفة مربعة، فبرهن أن:

$$|A^n| = |A|^n$$

14) إذا كانت A مصفوفة عديمة القوى، أي أن $A^n = 0$ ولكن $A^{n-1} \neq 0$، فبرهن أن $|A| = 0$.

15) إذا كان n عدد فردي وكانت A مصفوفة من نوع $n \times n$ بحيث أن $A^T = -A$، فبرهن أن $|A| = 0$.

3 . 3 استخدام المحددة في إيجاد معكوس المصفوفة المربعة

لنفرض أن:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

مصفوفة المعاملات المرافقة Cofactor Matrix للمصفوفة A هي مصفوفة مربعة من نوع n × n عناصرها هي المعاملات المرافقة A_{ij} ويرمز لهذه المصفوفة بالرمز cof(A).

$$cof(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots\cdots & A_{1n} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ A_{n1} & \cdots\cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

المصفوفة المرافقة للمصفوفة A (adjoint of) هي محورة مصفوفة المعاملات المرافقة للمصفوفة A.

ويرمز للمصفوفة المرافقة للمصفوفة A بالرمز adJ(A).

$$adJ(A) = [cof(A)]^T$$

مثال 8:

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

فأوجد adJ(A):

الحل

$$cof(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{33} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$adJ(A) = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 6 & 1 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

نظرية 3 . 3 . 1

إذا كانت A من نوع n × n، فإن $A\,adJ(A) = |A|\,I$

البرهان

للبساطة نستخدم في البرهان مصفوفة من نوع 3 × 3.

البرهان في حالة المصفوفة من نوع n × n مشابه للبرهان المعطى.

لنفرض أن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A\,adJ(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{31} & A_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$$

لأن المداخل غير القطرية هي محددة المصفوفة

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ولكن في هذه المصفوفة الصف الأول يساوي الصف الثاني، ومن ذلك فإن محددتها تساوي صفراً.

إذن:

$$A\,\text{adJ}(A) = |A|\, I$$

نظرية 2 . 3 . 3

إذا كانت $|A| \neq 0$، فإن المصفوفة A تكون قابلة للانعكاس وتكون.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{adJ}(A)$$

البرهان

إذا كان $|A| \neq 0$، فإن المصفوفة $\frac{1}{|A|}\,\text{adJ}(A)$ تكون معرفة.

الآن:

$$A\left(\frac{1}{|A|}\,\text{adJ}(A)\right) = \frac{1}{|A|}\left(A\,\text{adJ}(A)\right)$$

$$= \frac{1}{|A|}\,|A|\, I$$ من النظرية السابقة.

$$= I$$

من ذلك نرى أن:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{adJ}(A)$$

مثال 9:

إذا كانت A كما في المثال 8، فأوجد A^{-1}.

الحل

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{adJ}(A)$$

$$|A| = 2(4) - 0(-3) + 3(-3) = -1$$

ومن المثال السابق نجد أن:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -6 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

مثال 10:

بدون إيجاد المعكوس حدد ما إذا كانت المصفوفات التالية قابلة للانعكاسات أم لا.

أ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ب) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

ج) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ د) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

الحل

أ) $|A| = 0$

وبذلك تكون A غير قابلة للانعكاس.

ب) $|A| = -4 \neq 0$.

ومن ذلك تكون A قابلة للانعكاس.

ج) $|A| = 5 \neq 0$.

وبالتالي تكون A قابلة للانعكاس.

د) $|A| = -2(-4) + 0(0) - 2(4) = 0$.

وبذلك تكون A غير قابلة للانعكاس.

تمارين 3 . 3

1) إذا كانت:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

فأوجد:

أ) $cof(A)$ ب) $adJ(A)$

ج) $|A|$ د) A^{-1}

2) أوجد $|A|$ لكل من المصفوفات التالية:

أ) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ ب) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

ج) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

3) أوجد A^{-1} إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4) وضح أن:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & x & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x + a_4 \end{vmatrix} = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

5) إذا كانت B, A مصفوفتان من نوع n × n، فوضح أن $|BA| = |AB|$ على الرغم من أن $AB \neq BA$.

6) برهن إنه إذا كانت A مصفوفة مثلثية، فإن حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي = $|A|$.

7) أعطي مثال لتوضيح أن

$$|A + B| \neq |A| + |B|$$

8) إذا كانت $B = M^{-1}AM$، فبرهن أن $|B| = |A|$.

9) إذا كانت A مصفوفة قابلة للانعكاس، فبرهن أن $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$.

10) إذا كانت A وB مصفوفتان غير صفريتان وكان $AB = 0$، فوضح $|A| = 0$ و$|B| = 0$.

11) برهن أن مصفوفة المثلث العلوي تكون قابلة للانعكاس إذا وإذا كان لا يحتوي القطر الرئيسي على عنصر صفري.

3 . 4 حالات خاصة للمصفوفات

1 ـ المصفوفات المتماثلة Symmetric Matrices

تعريف 3 . 4 . 1

المصفوفة المتماثلة من نوع n × n هي المصفوفة التي تساوي محورتها.

أي أن المصفوفة $A_{n\times n}$ مصفوفة متماثلة إذا كان $A = A^{T}$.

مثال 11 :

المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

مصفوفة متماثلة.

2 ـ المصفوفة المتعامدة Orthogonal Matrix

تعريف 3 . 4 . 2

المصفوفة A تسمى مصفوفة متعامدة إذا كان $A^{-1} = A^{T}$.

مثال 12 :

وضح أن المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

مصفوفة متعامدة.

الحل

$$|A| = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$= A^T$$

إذن A مصفوفة متعامدة.

3 ـ المصفوفة متخالفة التماثل Skew-Symmetric Matrix

تعريف 3.4.3

المصفوفة $A_{n\times n}$ تسمى مصفوفة متخالفة Skew-Symmetric Matrix إذا كانت تساوي سالب محورتها. أي A مصفوفة متخالفه التماثل إذا كان $A = -A^T$.

مثال 13:

المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

مصفوفة متخالفة التماثل.

ملاحظات

إذا كانت $A_{n\times n}$ مصفوفة مربعة و B أي مصفوفة و S مصفوفة متماثلة و K مصفوفة متخالفة التماثل وكان a عدداً، فإن.

1) aS مصفوفة متماثلة.

2) aK مصفوفة متخالفة التماثل.

3) $SS^T = S^TS$.

4) $KK^T = K^TK$.

5) S^n مصفوفة متماثلة لأي عدد صحيح موجب n.

6) BB^T مصفوفة متماثلة.

7) $A + A^T$ مصفوفة متماثلة.

8) $A - A^T$ مصفوفة متخالفة التماثل.

9)

$$K^n = \begin{cases} \text{مصفوفة متماثلة ، إذا كان n عدداً صحيحاً زوجياً موجباً} \\ \text{مصفوفة متخالفة التماثل ، إذا كان n عدداً صحيحاً فردياً موجباً} \end{cases}$$

10) يمكن التعبير عن المصفوفة A كحاصل جمع مصفوفة متماثلة ومصفوفة متخالفة التماثل.

$$S = \frac{A + A^T}{2}, K = \frac{A - A^{-T}}{2}$$

4 ـ المصفوفات المجزئة Partitioned Matrices

في بعض الأحيان من المفضل تجزيء المصفوفات إلى مصفوفات جزئية (قوالب) وتعتبر هذه المصفوفات الجزئية عناصر داخل المصفوفة الواحدة التي نطلق عليها اسم المصفوفة المجزئة.

الأسلوب الذي يتم به تجزيء المصفوفة يشار إليه كخطوط متقطعة فعلى سبيل المثال:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & 3 & 4 \\ 8 & -5 & \vdots & 1 & -1 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 2 & \vdots & -1 & 3 \\ 6 & -7 & \vdots & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

جزئت هذه المصفوفة إلى المصفوفات

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$$

هذا التجزيء يساعد في القيام بالعمليات الجبرية على المصفوفات من نوع كبير وذلك بتجزئتها ثم القيام بالعمليات على المصفوفات الجزئية تعتبر عناصر في المصفوفة كبير الحجم.

عندما يكون النوع يتمشى مع جمع المصفوفات يمكن جمع المصفوفات المجزئة وذلك بجمع المصفوفات الجزئية المتناظرة.

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + A_2 & B_1 + B_2 \\ C_1 + C_2 & D_1 + D_2 \end{bmatrix}$$

يستخدم التجزيء هذا أيضاً في ضرب المصفوفات، فعلى سبيل المثال.

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 2 & 0 \end{bmatrix}} \overset{B}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 2 & \vdots & 0 & 0 \\ -2 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = AB$$

في حالة المثال السابق جزئنا كل من A وB وعاملنا كل مصفوفة جزئية وكأنها عنصر أو مدخل.

بصفة عامة، لنفرض أن A مصفوفة من نوع $m \times n$ وأن B مصفوفة من نوع $n \times p$.

نجزأ المصفوفة A إلى مصفوفات جزئية A_{ij}.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c:c} A_{11} & A_{12} & \cdots\ A_{1\ell} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots\ A_{2\ell} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ A_{h1} & A_{h2} & \cdots\ A_{h\ell} \end{array}\right]$$

ونجزيء B إلى مصفوفات جزئية B_{ij}.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c:c} B_{11} & B_{12} & \cdots\ B_{1M} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots\ B_{2M} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ B_{\ell 1} & B_{\ell 2} & \cdots\ B_{\ell M} \end{array}\right]$$

مع الأخذ في الاعتبار أن التجزيء العمودي للمصفوفة A يشبه التج[زيء] الصفي للمصفوفة B حت تكون المصفوفات A_{IJ} والمصفوفات B_{Jk} معرف[ة من] أجل عملية الضرب و $J = 1, 2, \ldots, \ell$. لاحظ أن التجزيء الصفي للمص[فوفة] A والتجزيء العمودي للمصفوفة B تجزيء اختياري.

تمارين 4.3

1) إذا كانت A مصفوفة متماثلة وقابلة للانعكاس، فوضح أن A^{-1} تك[ون] مصفوفة متماثلة أيضاً.

2) إذا كانت A مصفوفة متخالفة التماثل وقابلة للانعكاس، فوضح أن A^{-1} تكون مصفوفة متخالفة التماثل أيضاً.

3) إذا كانت A مصفوفة متعامدة، فبرهن أن $|A| = \pm 1$.

4) أوجد كل المصفوفات B من نوع 2×2 والتي تحقق $B^{-1} = B^{T}$

5) برهن الملاحظة 7.

6) برهن الملاحظة 8.

7) برهن الملاحظة 10.

8) استخدم التجزيء المبين لإيجاد A^2 حيث:

$$A = \left[\begin{array}{ccc:cc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

9) إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

نوضح أن

$$A^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & \cdots & A_{1n}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{2n}^T \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ A_{m1}^T & A_{m2}^T & \cdots & A_{mn}^T \end{bmatrix}$$

10) إذا كانت A_i وB_i مصفوفات مربعة من نفس النوع وإذا كانت

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & B_n \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix}$$

فأوجد $A + B$ وAB.

11) أوجد:

$$\left|\begin{array}{cc:cc} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{array}\right|$$

واستنتج قاعدة عامة لمثل هذه الحالة.

12) إذا كانت C, B, A مصفوفات مربعة، فبرهن أن

$$\left|\begin{array}{c:c} A & 0 \\ \hdashline B & C \end{array}\right| = |A|\,|C|$$

13) إذا كانت A^{-1} موجودة، فأوجد X بحيث أن

$$\left|\begin{array}{c:c} A^{-1} & 0 \\ \hdashline X & A^{-1} \end{array}\right|$$

هي معكوس المصفوفة:

$$\left|\begin{array}{c:c} A & 0 \\ \hdashline B & A \end{array}\right|$$

3 . 5 استخدام المصفوفات في حل أنظمة المعادلات الخطية

إذا كان:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots\cdots & + & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots\cdots & + & a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots\cdots & + & a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

فإن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

تسمى **مصفوفة المعاملات Coefficients Matrix**

والمصفوفة:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

تسمى مصفوفة المجاهيل أو المتجه العمودي للمجاهيل.

والمصفوفة:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

تسمى مصفوفة الحدود المطلقة أو المتجه العمودي للحدود المطلقة

ويصبح نظام المعادلات الخطية بدلالة المصفوفات كالتالي:

$$Ax = b$$

إذا كانت المصفوفة A قابلة للانعكاس، فإن الحل الوحيد لهذا النظام من المعادلات الخطية هو: $x = A^{-1}b$.

مثال 14:

حل النظام:

$$x_1 - 3x_2 = -1$$
$$3x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

الحـل

$$b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -6 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -6 & -5 & 3 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

إذن الحل:

$$x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$$

النظرية التالية توضح أن قابلية الانعكاس لمصفوفة المعاملات ووجود حل وحيد للنظام $Ax = b$ جملتان متكافئتان.

نظرية 1 . 5 . 3

إذا كانت A مصفوفة من نوع $n \times n$، فإن الجمل التالية تكون متكافئة.

أ) A تكون قابلة للانعكاس.

ب) للنظام $Ax = b$ حل وحيد.

ج) الحل الوحيد للنظام $Ax = 0$ هو الحل التافه (أي أن $x = 0$).

البرهان

نبرهن هذه النظرية باتباع الطرق أ ⟸ ب ⟸ ج ⟸ أ،

نبرهن أولاً أ ⟸ ب.

A قابلة للانعكاس بمعنى أن A^{-1} موجودة.

بضرب $Ax = b$ على اليسار في A^{-1} نصل إلى $x = A^{-1}b$

النظام له الحل الوحيد $x = A^{-1}b$ لأي متجه عمودي b من نوع $n \times 1$

ثانياً نبرهن ب ⟸ ج

لنفرض أن للنظام $Ax = b$ حلاً وحيداً لأي متجه عمودي b من نوع $n \times 1$.

إذا كان اختيارنا للمتجه b بحيث $b = 0$، فإن للنظام $Ax = 0$ حلاً واحداً وفقط هو $x = 0$.

ثالثاً نبرهن ج ⟸ أ

نبرهن ذلك بطريقة أخرى وهي عدم صحة ج يؤدي إلى عدم صحة أ.

نفترض أن $Ax = 0$ له حل آخر بالاضافة إلى الحل $x = 0$، أي يوجد متجه x حيث.

$$x \neq 0 \text{ يحقق النظام } Ax = 0$$

ولكن من التمارين السابقة وجدنا أنه إذا كان هناك مصفوفتان $B \neq 0$، $C \neq 0$ وحاصل ضربهما $BC = 0$، فإن ذلك يؤدي إلى أن B وC غير قابلتين للانعكاس.

إذن نستطيع من $Ax = 0$ إستنتاج أن $A = 0$ أو A تكون غير قابلة للانعكاس، وهذا عدم صحة أن A قابلة للانعكاس.

إذن ج يؤدي إلى أ وبذلك يكون قد انتهى برهان هذه النظرية.

نظرية 2 . 5 . 3 (قاعدة كرامر Cramer's Rule)

إذا كانت A مصفوفة من نوع $n \times n$ وكان $|A| \neq 0$، فإن حل النظام

$$Ax = b$$

هو: $x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$ حيث $1 \leq i \leq n$

عندما تكون المصفوفة A_i هي المصفوفة A مع تبديل العمود الذي ترتيبه i بعمود المتجه b.

البرهان

نبرهن هذه النظرية في حالة ما تكون A من نوع 3×3. البرهان في حالة ما تكون A من نوع $n \times n$ مشابة لهذا البرهان:

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

بما أن $|A| \neq 0$ فإن A تكون قابلة للانعكاس وبذلك يكون الحل الوحيد لهذا النظام هو $x = A^{-1}b$.

ولكن:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adJ}(A)$$

إذن:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \text{adJ}(A)b = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32} \\ b_3A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33} \end{bmatrix}$$

وبذلك يكون:

$$x_1 = \frac{b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}}{|A|}$$

$$x_3 = \frac{b_1A_{13} + b_2A_{33} + b_3A_{33}}{|A|}$$

نلاحظ أن بسط x_1 هو محددة المصفوفة:

$$A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

وبذلك فإن:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$$

بنفس الكيفية بسط x_2 هو محددة المصفوفة:

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}$$

وبذلك فإن:

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$$

نلاحظ كذلك بأن بسط x_3 هو محددة المصفوفة

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}$$

أي أن

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$$

مثال 19 :

استخدم قاعدة كرامر لحل النظام :

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = -3$$
$$-x + 2x_2 - 2x_3 = 8$$
$$3x_1 + x_2 + 3x_3 = 7$$

الحـل

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -1 & 8 & -2 \\ 3 & 7 & 3 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 8 & 2 & -2 \\ 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A_3| = 2, |A_2| = -8, |A_1| = -4, |A| = -2$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-8}{-2} = 4, \quad x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x_3 = \frac{|A|}{|A|} = \frac{2}{-2} = -1$$

تمارين 3 . 5

1) باستخدام المصفوفات حل النظام

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -3$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 4$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 5$$

2) استخدم قاعدة كرامر لحل النظام

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = -3$$
$$-x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 8$$
$$3x_1 + x_2 + 3x_3 = 7$$

3) حل بدلالة t هذا النظام

$$2tx_1 + tx_2 - x_3 = 2$$
$$tx_1 + tx_2 - x_3 = 1$$
$$tx_1 + x_2 + tx_3 = 2$$

4) حل النظام

$$x_1 + 2x_2 = 2$$
$$x_2 + 3x_3 = 4$$
$$x_3 + 4x_4 = 4$$
$$-5x_1 + x_4 = 5$$

5) حل النظام

$$x_1 + x_3 + x_5 = 3$$
$$x_2 + x_4 - x_5 = 4$$
$$x_1 + x_2 - x_5 = 2$$
$$x_1 + x_3 + x_4 = -1$$
$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 2$$

تمارين الفصل الثالث

1) أوجد محددة المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 1 & \lambda & 4 \\ -2 & -4 & \lambda \end{bmatrix}$$

2) إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فأوجد $|AB|$.

3) أوجد قيم λ بحيث تكون:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

4) إذا كانت A مصفوفة من نوع $n \times n$ وكان K عدداً، فبرهن أن $|KA| = K^n |A|$.

5) إذا كانت A, B مصفوفتان من نوع $n \times n$، فبرهن أن $|A^T B| = |AB^T| = |A^T B^T| = |AB|$

6) حل النظام:

$$2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3$$
$$x_2 = 2$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

7) إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -x & 2 & 2 \\ 1 & 4 & -x & 1 \\ -2 & -4 & -1 & -x \end{bmatrix}$$

فأوجد:

أ) $|A|$.

ب) قيم x التي تجعل $|A| = 0$.

8) إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

فأوجد A^{-1}.

9) إذا كانت A, B مصفوفتان قابلتان للانعكاس وكان $|A| = 2$ و $|B| = 5$، فأوجد.

أ) $|AB|$ ب) $|A^2|$

جـ) $|A^T|$ د) $|(A^{-1}B^{-1})^T|$

هـ) $|B^{-1}|$

10) حل النظام:

$$x_1 + 2x_2 = 2$$
$$x_2 + 3x_3 = 3$$
$$x_3 + 4x_4 = 4$$
$$-5x_1 + 2x_4 = 5$$

الفصل الرابع

الفضاءات الاتجاهية

Vector spaces

Math.

في دراستنا السابقة تم الإجابة على بعض الأسئلة حول وجود ووحدانية الحل للنظام $Ax = b$.

نهدف في هذا الفصل إلى دراسة مختلفة وبشكل أعمق للمسألة نفسها وهي حلول النظام.

$$Ax = b$$

تتم الإجابة على بعض التساؤلات مثل حالة المصفوفات المستطيلة ونوعية الحل في مثل هذه الحالة.

نحتاج في دراستنا لهذه المسألة إلى دراسة موضوع الفضاءات الاتجاهية ولفهم هذه الفكرة نبدأ أولاً بتعريف:

4 . 1 الفضاء الاتجاهي Vector space

قبل تعريف الفضاء الاتجاهي نحتاج إلى فكرة رياضية تسمى المجال Field.

تعريف 4 . 1 . 1 (المجال)

المجال F هو مجموعة غير خالية تعرف عليها عمليتان هما الجمع + والضرب.

حيث يتحقق ما يلي:

1) إذا كان $a, b \in F$، فإن $a + b \in F$

2) $a + b = b + a$ كلما كان $a, b \in F$

3) $(a + b) + c = a + (b + c)$ حيث $a, b, c \in F$

4) يوجد $O \in F$ حيث $a + 0 = a$ لكل $a \in F$

5) لكل $a \in F$ يوجد $-a \in F$ حيث $a + (-a) = 0$

6) $a.b \in F$ كلما كان $a, b \in F$

7) $a.b = b.a$ لكل $a, b \in F$

8) $(a.b).c = a.(b.c)$ حيث $a, b, c \in F$

9) يوجد العنصر $1 \in F$ حيث $a.1 = a$

10) لكل $a \neq 0$ في F يوجد $a^{-1} \in F$ حيث $a.a^{-1} = 1$

مثال 1 :

مجموعة الأعداد الحقيقية مع عمليتي الجمع + والضرب. العاديتين تكون مجال الأعداد الحقيقية.

مثال 2 :

مجموعة الأعداد المركبة $C = \{x + iy : x, y \in R\}$ مع عمليتي الجمع

الأعداد المركبة (+) وضرب الأعداد المركبة (.) تكون مجال الأعداد المركبة والذي نرمز له أحياناً بالرمز R^2.

تعريف 4 . 1 . 2 (الفضاء الاتجاهي)

الفضاء الاتجاهي على مجال F هو نظام جبري يتكون من مجموعة غير خالية من العناصر (متجهات) V ومجال قياسي F وأربع عمليات $\oplus, \odot, +, .$

حيث تتحقق الشروط التالية:

1) إذا كان $x, y \in V$، فإن $x \oplus y \in V$.

2) $x \oplus y = y \oplus x$ لكل $x, y \in V$.

3) $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ لكل $x, y, z \in V$.

4) يوجد المتجه 0 في V حيث $x \oplus 0 = x$ لكل $x \in V$.

5) لكل x يوجد المتجه $(-x)$ في V حيث $x \oplus (-x) = 0$.

6) $a \odot x \in V$ حيث $x \in V$ و $a \in F$.

7) $(a \odot b) \odot x = a \odot (b \odot x)$ حيث $x \in V$ و $a, b \in F$.

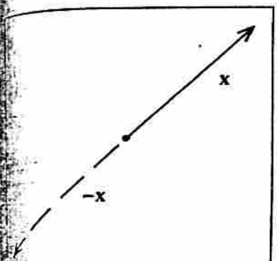
8) $a \odot (x \oplus y) = a \odot x \oplus a \odot y$ لكل $x, y \in V$ و $a \in F$.

9) $(a + b) \odot x = a \odot x + b \odot x$ لكل $x \in V$ و $a, b \in F$.

10) يوجد $1 \in F$ حيث $1 \odot x = x$ لكل $x \in V$.

يسمى 0 بالمتجه الصفري ويسمى المتجه $-x$ بسالب المتجه x. إذا كان $F = R$، فإننا نقول بأن V فضاء اتجاهي حقيقي، وإذا كان $F = C$ فإننا نقول بأن V فضاء اتجاهي مركب.

إذا لم يذكر المجال F يكون مفهوماً بأن: $F = R$.



الفضاء الاقليدي نوني الإبعاد R^n هو الفضاء الذي يتكون من المتجهات التي على الشكل $V = (v_1, v_2, ..., v_n)$ حيث v_i أعداد حقيقية تسمى مركبات المتجه V.

إذا كان $V = (x_1, x_2, ..., x_n)$ و $U = (y_1, y_2, ..., y_n)$ في R^n، فإن:

1) $V + U = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$.

2) $U = V$ إذا وإذا كان فقط $x_i = y_i$ لكل i .

3) $aV = (ax_1, ax_2, ..., ax_n)$ حيث $a \in R$.

4) المتجه الصفري في V هو $0 = (0, 0, ..., 0)$.

مثال 3 :

لكل عدد صحيح موجب n يكون الفضاء R^n فضاء اتجاهياً، أي $R, R^2, R^3, ...$ فضاءات اتجاهية على المجال R.

ولهذا نستطيع تحديد المتجه إلى n من الأبعاد مباشرة وذلك بعد المركبات التي تكون المتجه.

نلاحظ أن هناك عمليتين في أي فضاء اتجاهي يمكن القيام بهما: أي متجهين، وضرب كمية عددية في متجه.

مثال 4 :

فضاء الأبعاد اللانهائية R^∞ يتكون من متجهات لها عدد لانهائي من المركبا $(a, b, c, d, ...)$ مع عمليتي الجمع والضرب في عدد كما في R^n.

... R^∞ فضاء اتجاهي.

مثال 5 :

فضاء المصفوفات من نوع 3 × 3 بمداخل من أعداد حقيقية. والذي سنرمز له بالرمز $M_{3\times3}$ تحت عمليتي جمع المصفوفات وضرب عدد في مصفوفة يكون فضاء اتجاهياً.

مثال 6 :

فضاء الدوال المتصلة الحقيقية على فترة $[a, b]$ تحت عمليتي جمع الدوال وضرب عدد في دالة.

هذا الفضاء يكون فضاء اتجاهياً سنرمز له بالرمز $C[a, b]$.

سنركز انتباهنا على بعض الفضاءات الاتجاهية ودراستها دراسة وافية لما لهذه الفضاءات من أهمية في الدراسة المستقبلية للرياضيات.

تمارين 4 . 1

1) وضح أن الفضاء R^∞ هو فضاء اتجاهي.

2) وضح أن $M_{n\times n}$ (فضاء المصفوفات المربعة من نوع $n \times n$) هو فضاء اتجاهي.

3) إذا كان V فضاء اتجاهياً و 0 يدل على المتجه الصفري، $-x$ على سالب المتجه x، فبرهن أن

أ) $0x = 0$

ب) $(-1)x = -x$

ج) $a0 = 0$

4) إذا كانت $C[0,1]$ هي مجموعة الدوال المتصلة على $[0,1]$ فوضح أن $C[0,1]$ تحت عمليتي جمع الدوال وضرب كمية عددية في دالة تكون فضاء اتجاهياً.

5) إذا كانت V هي مجموعة الدوال الحقيقية الفردية (الدالة f فردية إذا كان $f(-x) = -f(x)$)، فوضح أن V تكون فضاء اتجاهياً تحت عمليتي جمع الدوال وضرب كمية عددية في دالة.

4 . 2 فضاءات اتجاهية هامة

(1) الفضاء الاتجاهي R^n

ذكرنا فيما سبق أن الفضاء R^n هو فضاء اتجاهي (على الطالب أن يتحقق من ذلك)، نتعرف على بعض العمليات والخواص التي يمتاز بها الفضاء الاتجاهي R^n.

الضرب الداخلي (Inner product) في R^n

إذا كان

$$u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ و } v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

متجهين في R^n، فإن الضرب الداخلي للمتجهين u و v يعرف كما يلي:

$$u.v = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots\dots + x_ny_n$$

مثال 7:

أوجد u.v إذا كان $u = (1, -2, 4, 6)$ و $v = (2, -1, 3, 2)$ في R^4

الحل

$$u.v = (1)(2) + (-2)(-1) + (4)(3) + 6(2) = 28$$

لاحظ أن حاصل الضرب الداخلي لمتجهين في R^4 هو عدد حقيقي وليس متجهاً في R^4.

نظرية 4 . 2 . 1 (خواص الضرب الداخلي)

إذا كانت:

$$u, v, w \in R^n \text{ و } a \in R$$

فإن:

أ) $u.u \geq 0$

ب) $u.u = 0 \Longleftrightarrow$ إذا وإذا كانت فقط $u = 0$.

ج) $u.0 = 0$

د) $u.v = v.u$

هـ) $u.(v + w) = u.v + u.w$

و) $(u + v).w = u.w + v.w$

ز) $(au).v = a(u.v)$

م) $u.(av) = a(u.v)$

البرهان

إذا كانت:

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_n),\ v = (v_1, v_2, \dots, v_n),\ u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

متجهات في R^n وكان a عدد، فإن:

أ) $u.u = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 \geq 0$

ب) إذا كان $u.u = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = 0$، فإن ذلك لا يحصل إلا إذا كان $u_i = 0$ لكل $1 \leq i \leq n$، وهذا يعني أن

$u = (0, 0, \ldots, 0)$ المتجه الصفري.

العكس:

إذا كانت: $u = (0, 0, \ldots, 0)$، فإن:

$$u.u = 0^2 + 0^2 + \ldots + 0^2 = 0$$

ج) $u.0 = u_1 0 + u_2 0 + \ldots + u_n 0 = 0 + 0 + \ldots + 0 = 0$

د) $u.v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$

$$= v_1 u_1 + v_2 u_2 + \ldots + v_n u_n = v.u$$

هـ) $v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n)$

$$u.(v + w) = u_1(v_2 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) + \ldots + u_n(v_n + w_n)$$
$$= u_1 v_1 + u_1 w_1 + u_2 v_2 + u_2 w_2 + \ldots + u_n v_n + u_n w_n$$
$$= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n + u_1 w_1 + u_2 w_2 + \ldots + u_n w_n$$
$$= u.v$$

و) برهان هذه الفقرة يشبه برهان الفقرة السابقة (هـ).

ز) $au = (au_1, au_2, \ldots, au_n)$

وبذلك فإن:

$$(au).v = (au_1)v_1 + (au_2)v_2 + \ldots + (au_n)v_n$$
$$= a(u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n)$$
$$= a(u.v)$$

م) برهان هذه الفقرة يشبه برهان الفقرة السابقة (ز).

المسافة والطول في R^n

إذا كان:

$v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ و $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

متجهين في R^n، فإن طول المتجه u (norm of u) يعرف كما يلي:

$$\| u \| = \sqrt{u.u} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

والمسافة (distance) بين المتجهين u و v تعرف كما يلي:

$$d(u, v) = \| u - v \| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

إذا كان $\| u \| = 1$، فإن المتجه u يسمى متجه الوحدة، نستطيع الحصول على متجه الوحدة في اتجاه أي متجه غير صفري v وذلك بضرب المتجه في مقلوب طوله أي أن $u = \frac{v}{\| v \|}$ يكون متجه وحدة في اتجاه v.

مثال 8:

إذا كان:

$V = (1, -2, 4, 7, 5)$ و $u = (2, 3, -3, 1, 4)$

فأوجد

أ) $\| v \|$ ب) $d(u, v)$

ج) متجه الوحدة في اتجاه v.

الحل

أ)

$$\| V \| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (4)^2 + (7)^2 + (5^2)}$$
$$= \sqrt{1 + 4 + 16 + 49 + 25}$$
$$= \sqrt{95}$$

ب) $d(u,v) = \sqrt{(2-1)^2 + (3+2)^2 + (-3-4)^2 + (1-7)^2 + (4-5)^2}$

$= \sqrt{1+25+49+36+1}$

$= \sqrt{112}$

ج)

$$\frac{V}{\| v \|} = \frac{(1, -2, 4, 7, 5)}{95}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{95}}, \frac{-2}{\sqrt{95}}, \frac{4}{\sqrt{95}}, \frac{7}{\sqrt{95}}, \frac{5}{\sqrt{95}}\right)$$

متجهات الوحدة القياسية في R^n هي المتجهات

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$
$$\vdots$$
$$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

هذه المتجهات تلعب دوراً كبيراً في الفضاء الاتجاهي R^n، والنظرية التالية تلخص أهم خواص هذه المتجهات.

نظرية 2.2.4

إذا كانت $e_1, e_2, \dots, e_n$ متجهات الوحدة القياسية في R^n، فإن

أ) $e_i.e_i = 1$

ب) $e_i.e_j = 0$ إذا كان $i \neq j$

ج) إذا كان $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ أي متجه في R^n، فإن

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$$

(2) فضاء الدوال كثيرة الحدود (Polynomials)

دالة كثيرة الحدود في متغير واحد وبمعاملات من أعداد حقيقية تعرف كما يلي:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

حيث $a_0, a_1, \dots, a_n$ أعداد حقيقية.

العدد الصحيح الموجب n حيث $a_n \neq 0$ يسمى درجة كثيرة الحدود.

تعتبر الدالة الثابتة $p(x) = a_0$ دالة كثيرة الحدود ودرجتها صفراً، أما الدالة الصفرية $p(x) = 0$ فتعتبر دالة كثيرة الحدود ولكن ليس لها درجة.

لكل عدد حقيقي موجب n تكون هناك مجموعة من الدوال كثيرة الحدود سنرمز لها بالرمز P_n، فمثلاً $P_0 = \{a_0 : a_0 \in R\}$

$$P_1 = \{a_0 + a_1x : a_0, a_1 \in R\}$$
$$\vdots$$
$$P_n = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n : a_0, a_1, \dots, a_n \in R\}$$

كما هو الحال في الدوال، فإن دالتي كثيرة الحدود q, P تكونان متساويتين إذا كان نطاقهما متساوياً و $p(x) = q(x)$ لكل x في النطاق.

بمعنى آخر:

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = p(x) = q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$$

إذا كان:

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$$

عمليات على كثيرات الحدود

إذا كانت:

$p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$

و $q(x) = b_0 + b_1x + ... + b_nx^n$

فإن:

1) $P(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + ... + (a_n + b_n)x^n$

2) $KP(x) = Ka_0 + Ka_1x + ... + Ka_nx^n$

بوضع $K = -1$ نحصل على

$$-P(x) = -a_0 - a_1x - ..... - a_nx^n$$

نظرية 4 . 2 . 3 (خواص P_n)

إذا كان: $p(x), q(x), r(x) \in P_n$

وكان $K_1, K_2 \in \mathbf{R}$، فإن

1) $P(x) + q(x) \in P_n$
2) $P(x) + q(x) = q(x) + P(x)$ لكل $P(x), q(x) \in P_n$
3) $[P(x) + q(x)] + r(x) = p(x) + [q(x) + r(x)]$
4) توجد $0(x) = 0$ في P_n حيث $P(x) + 0(x) = P(x)$ لكل $P(x) \in P_n$
5) $P(x) + [-P(x)] = 0(x)$
6) $K_1P(x) \in P_n$
7) $K_1[P(x) + q(x)] = K_1P(x) + K_1q(x)$
8) $(K_1 + K_2)P(x) = K_1P(x) + K_2P(x)$
   $(K_1K_2)P(x) = K_1(K_2P(x))$
9) $1P(x) = P(x)$

نعرف الضرب الداخلي لعنصرين في P_n كما يلي:

إذا كانت:

$$p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$$
$$q(x) = b_0 + b_1x + ... + b_nx^n$$

فإن الضرب الداخلي:

$$p(x).q(x) = a_0b_0 + a_1b_1 + ... + a_nb_n$$

نستخدم الرمز $< p(x), q(x) >$ للدلالة على الضرب الداخلي للدالتين $p(x)$ و $q(x)$ بدلاً من $p(x).q(x)$.

$$< p(x), q(x) > = a_0b_0 + a_1b_1 + ... + a_nb_n$$

الكثير من خواص الضرب الداخلي المعرف على $\mathbf{R}^n$ يتم المحافظة عليها للضرب الداخلي المعرف على p_n.

نظرية 4 . 2 . 4

(خواص الضرب الداخلي للدوال كثيرة الحدود)

إذا كانت $p(x), q(x), r(x) \in p_n$ وكان $k \in \mathbf{R}$،

فإن:

1) إذا كانت $p(x) \neq 0$، فإن $< p(x), p(x) > 0$ و $< p(x), p(x) > = 0$ إذا وإذا كانت فقط $p(x) = 0$.
2) $< p(x), q(x) > = < q(x), p(x) >$
3) $< p(x) + q(x), r(x) > = < p(x), r(x) > + < q(x), r(x) >$
4) $< Kp(x), q(x) > = < P(x), kq(x) > = K < p(x), q(x) >$

مثال 9 :

إذا كانت :

$p(x) = -3x + x^2$ و $q(x) = 2 + 4x$ و $r(x) = 7 + x^2$

فأوجد :

1) $< p(x), q(x) >$ 2) $< p(x) + q(x), r(x) >$

3) $< 3p(x), q(x) >$ 4) $< p(x), p(x) >$

الحل

$p(x) = 0 - 3x + x^2$ و $q(x) = 2 + 4x$ و $r(x) = 7 + 0x + x^2$

1) $< p(x), q(x) > = 0(2) + (-3)(4) + (1)(0) = -12$

2) $p(x) + q(x) = 2 + x + x^2$

$< p(x) + q(x), r(x) > = 2(-7) + (1)(0) + (1)(1) = -13$

3) $3p(x) = 0 - 9x + 3x^2$

$< 3p(x), q(x) > = 0(2) + -9)(4) + 3(0) = -36$

4) $< p(x), p(x) > = (0)(0) + (-3)(-3) + (1)(1) = 9 + 1 = 10$

لكل عدد صحيح موجب n تكون المجموعة P_n مع عمليتي الـ(جمع كثيرات الحدود) والضرب (ضرب كثيرة الحدود في عدد حقيقي) اتجاهياً .

(3) فضاء المصفوفات

لنفرض أن :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

مصفوفة من نوع $m \times n$ بمداخل a_{ij} من الأعداد الحقيقية .

المجموعة $M_{m\times n} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbf{R} \right\}$

مع عمليتي جمع المصفوفات وضرب عدد حقيقي في مصفوفة تكون فضاء اتجاهياً يسمى الفضاء الاتجاهي للمصفوفات . سنرمز لهذا الفضاء بالرمز $M_{m\times n}$.

(4) فضاء الدوال

لنفرض أن $\mathbf{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ دالة .

المجموعة $F = \{f\}$ مع عمليتي جمع الدوال وضرب دالة في عدد حقيقي تكون فضاء اتجاهياً يسمى الفضاء الاتجاهي للدوال .

$$(f + g)x = f(x) + g(x)$$

و

$$(Kf)x = Kf(x)$$

كل الأمثلة التي درسناها سابقاً تعطى فضاءات اتجاهية . نعطي الآن مثالاً لمجموعة مع عمليتين لا تكون فضاء اتجاهياً .

مثال 10 :

هل المجموعة

$$V = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_2 \geq 0\}$$

تكون فضاء اتجاهياً؟

الحل

نلاحظ أن $(1,2) \in V$ ولكن $-2(1,2) = (-2,-4)$ لا ينتمي إلى المجموعة V.

معنى ذلك أن هناك $K = -2$ في $\mathbf{R}$ حيث $K(x_1, x_2) \notin V$. إذن V لا تكون فضاءاً اتجاهياً.

تمارين 4 . 2

1) أوجد المسافة بين المتجهين المذكورين في كل حالة

أ) $v = (0,-1,0,1), u = (1,0,-1,0)$

ب) $v = (2,1,2,-1,1,0,3), u = (1,-1,3,5,2,1)$

ج) $v = (0,0,0,1,-1), u = (1,-1,0,0,0)$

2) أوجد متجه الوحدة في اتجاه المتجه $u = (5,2,-1,1)$.

3) أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين المذكورين في كل حالة.

أ) $v = (-1,2,5,0), u = (5,1,2,3)$

ب) $v = (2,-8,0,1,-1,-2), u = (1,0,2,-1,0,1)$

4) أوجد قيمة x التي تجعل $u.v = 0$ حيث:

$$v = (-1,2,0,4), u = (1,2,2,x)$$

5) إذا كان $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ متجهاً في $\mathbf{R}^4$، فوضح أن u يمكن التعبير عنه على الشكل:

$$u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3 + u_4e_4$$

6) إذا كانت: $p(x) = x^2 - 3x + 3$ و $q(x) = x^2 + 2x + 2$.

فأوجد:

أ) $2p(x)$.

ب) $p(x) - q(x)$.

ج) $< p(x), q(x) >$.

7) برهن النظرية 2.2.4.

8) برهن النظرية 3.2.4.

9) وضح أن المجموعة $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbf{R} \right\}$ تكون فضاء اتجاهياً.

10) وضح أن المجموعة

$$\{a_0 + a_1x^2 : a_0, a_1 \in \mathbf{R}\}$$

تكون فضاء اتجاهياً.

11) وضح أن مجموعة كل المتتاليات المتقاربة تكون فضاءاً اتجاهياً.

12) برهن النظرية 4.2.4.

4 . 3 الفضاءات الجزئية Subspaces

تعريف 4 . 3 . 1

الفضاء الجزئي W للفضاء الاتجاهي V هو مجموعة جزئية غير خالية W من V بحيث تكون فضاء اتجاهياً تحت عمليتي الجمع والضرب في عدد والمعرفتين على V.

مثال 11 :

هل : $W = \{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$

فضاء جزئي للفضاء الاتجاهي $\mathbf{R}^3$؟

الحل

عند التحقق من كل شروط الفضاء الاتجاهي نجد أن المجموعة W تحت عمليتي الجمع والضرب في عدد المعرفتين على $\mathbf{R}^3$، تحقق كل شروط الفضاء الاتجاهي، وبذلك يكون W فضاء جزئياً للفضاء الاتجاهي $\mathbf{R}^3$.

إذا كانت W مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء الاتجاهي V، وكان لكل $x_1, x_2 \in W$ ينتج أن $x_1 + x_2 \in W$ وكذلك $Kx_1 \in W$ لكل $K \in \mathbf{R}$، فإن W فضاء جزئي من V. باقي خواص الفضاء الاتجاهي تتحقق للمجموعة W لأنها تتحقق في الفضاء V.

هذه الملاحظة تقودنا إلى تعريف عملي بسيط التحقق للفضاء الجزئي.

تعريف 2.3.4

الفضاء الجزئي W للفضاء الاتجاهي V هو مجموعة جزئية غير خالية من V تحقق شرطين هما:

1) إذا كان $x_1, x_2 \in W$، فإن $x_1 + x_2 \in W$.

2) إذا كان $x \in W$ و $K \in \mathbf{R}$، فإن $Kx \in W$.

بمعنى آخر الفضاء الجزئي هو مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء الاتجاهي مغلقة تحت عملية الجمع وعملية الضرب في كمية عددية.

لكل فضاء اتجاهي V يوجد فضاءان جزئيان هما:

1) الفضاء الجزئي الذي يحتوي على متجه واحد فقط ويكون هذا المتجه بالضرورة المتجه الصفري.

$$W = \{0\}$$

2) الفضاء الاتجاهي الأصلي نفسه:

$$W = V$$

مثال 12

إذا كان v متجهاً في الفضاء الاتجاهي V، فإن:

$$W = \{x : x = Kv, k \in \mathbf{R}\}$$

فضاء جزئي من الفضاء الاتجاهي V.

إذا كان: $x_1, x_2 \in W$، فإن: $x_2 = kv_2, x_1 = kv_1$

وبذلك فإن:

$$x_1 + x_2 = kv_1 + kv_2 = k(v_1 + v_2)$$

وحيث أن: $v_1 + v_2 \in v$.

فإن: $K(v_1 + v_2)$ في W.

لنفرض أن $a \in \mathbf{R}$.

$$ax_1 = a(kv_1) = (ak)v_1$$

حيث أن $a, k \in \mathbf{R}$، فإن $aK \in \mathbf{R}$ وبذلك يكون $(ak)v_1 \in W$.

إذن W فضاء جزئي من الفضاء الاتجاهي v.

مثال 13 :

هل: $$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

1) الفضاء الجزئي الذي يحتوي على متجه واحد فقط ويكون هذا المتجه بالضرورة المتجه الصفري.

$$W = \{0\}$$

2) الفضاء الاتجاهي الأصلي نفسه:

$$W = V$$

مثال 12

إذا كان v متجهاً في الفضاء الاتجاهي V، فإن:

$$W = \{x : x = Kv, k \in \mathbf{R}\}$$

فضاء جزئي من الفضاء الاتجاهي V.

إذا كان: $x_1, x_2 \in W$، فإن: $x_2 = kv_2, x_1 = kv_1$

وبذلك فإن:

$$x_1 + x_2 = kv_1 + kv_2 = k(v_1 + v_2)$$

وحيث أن: $v_1 + v_2 \in v$.

فإن: $K(v_1 + v_2)$ في W.

لنفرض أن $a \in \mathbf{R}$.

$$ax_1 = a(kv_1) = (ak)v_1$$

حيث أن $a, k \in \mathbf{R}$، فإن $aK \in \mathbf{R}$ وبذلك يكون $(ak)v_1 \in W$.

إذن W فضاء جزئي من الفضاء الاتجاهي v.

مثال 13 :

هل:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

فضاء جزئي للفضاء الاتجاهي $M_{2\times2}$ ؟

الحـل

لنفرض أن :

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in W$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{bmatrix}$$

والمصفوفة الناتجة في W.

لنفرض أن $K \in \mathbf{R}$

$$K\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ka & 0 \\ 0 & kd \end{bmatrix}$$

والمصفوفة الناتجة أيضاً في W.

إذن W فضاء جزئي من الفضاء الاتجاهي $M_{2\times2}$.

مثال 14 :

هل : $W = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$

فضاء جزئي من $\mathbf{R}^2$ ؟

الحل

لاحظ أن $(1,2) \in W$ و $W \not\in (-4-,2-) = (-2,-4) = -2(1,2)$ إذن المجموعة W لا تكون فضاء جزئياً من $\mathbf{R}^2$.

نظرية 1.3.4

إذا كان W_1, W_2 فضائين جزئيين من الفضاء الاتجاهي V، فإن $W_1 \cap W_2$ فضاء جزئي للفضاء الاتجاهي V.

البرهان

لنفرض أن : $x, y \in W_1 \cap W_2$

معنى ذلك أن :

$x, y \in W_1$ و $x, y \in W_2$

ومن ذلك نجد أن :

$x + y \in W_1$ و $x + y \in W_2$

وهذا يعطي أن :

$x + y \in W_1 \cap W_2$

لنفرض أن : $x \in W_1 \cap W_2$

معنى ذلك أن $x \in W_1$ وكذلك $x \in W_2$.

حيث أن W_1 فضاء جزئي، فإن $Kx \in W_1$ لأي عدد حقيقي K وكذلك Kx, W_2 لأن W_2 فضاء جزئي.

إذن $Kx \in W_1 \cap W_2$.

من ذلك نستنتج أن $W_1 \cap W_2$ فضاء جزئي للفضاء الاتجاهي V.

مثال 15 :

لنفرض أن V هو فضاء المصفوفات من نوع $n \times n$، وأن W_1 هو فضاء مصفوفات المثلث العلوي وW_2 هو فضاء مصفوفات المثلث السفلي.

أوجد $W_1 \cap W_2$ وهل هذا يمثل فضاء جزئياً من فضاء المصفوفات من نوع $n \times n$ ؟

الحل

لاحظ أن W_1 وW_2 فضاءان جزئيان للفضاء الاتجاهي V. إذن $W_1 \cap W_2$ فضاء جزئي من الفضاء الاتجاهي V حسب النظرية السابقة.

الفضاء $W_1 \cap W_2$ هو فضاء المصفوفات القطرية.

ملاحظة:

اتحاد فضائين جزئيين لفضاء اتجاهي قد لا يكون فضاء جزئياً لذلك الفضاء الاتجاهي. والمثال على ذلك ما يلي:

$$W_2 = \{(0,y) : y \in \mathbf{R}\}, W_1 = \{(x,0) : x \in \mathbf{R}\}$$

W_2, W_1 فضاءان جزئيان من $\mathbf{R}^2$. لاحظ أن $(0 , 1)$ و $(0,1)$ يوجدان في الاتحاد ولكن $(1,1) = (1,0) + (0,1)$ لا يوجد في اتحادهما.

تعريف 3.3.4

لنفرض أن W_1، W_2 مجموعتان جزئيتان لفضاء اتجاهي V.

المجموعة $W_2 + W_2$ هي:

$$W_1 + W_2 = \{x + y : x \in W_1, y \in W_2\}$$

نظرية 2.3.4

إذا كان W_1 و W_2 فضائين جزئيين لفضاء اتجاهي V، فإن $W_1 + W_2$ فضاء جزئي للفضاء الاتجاهي V.

البرهان

لنفرض أن: $u, v \in W_1 + W_2$

إذن:

$u = x_1 + y_1$ و $v = x_2 + y_2$

حيث:

$x_1, x_2 \in W_1$ و $y_1, y_2 \in W_2$

إذن:

$x_1 + x_2 \in W_1$ و $y_1 + y_2 \in W_2$

ومن ذلك:

$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \in W_1 + W_2$

نستطيع وضع: $x_1 + x_2 + y_1 + y_2$ على شكل:

$u + v = x_1 + y_1 + x_2 + y_2$

إذن:

$$u + v \in W_1 + W_2$$

الآن لنفرض أن: $u \in W_1 + W_2$

وبذلك يكون على شكل: $u = x + y$ حيث: $x \in W_1$ و $y \in W_2$.

ونستنتج أن:

$Kx \in W_1$ و $Ky \in W_2$

إذن:

$$Kx + Ky = K(x + y) = Ku$$

موجود في $W_1 + W_2$ ومن ذلك كله نستنتج أن $W_1 + W_2$ هو فضاء جزئي للفضاء V.

مثال 16 :

إذا كان V هو فضاء مصفوفات المثلث العلوي وW هو فضاء مصفوفات المثلث السفلي، فإن $V + W$ هو فضاء كل المصفوفات.

هذا يعني أن أي مصفوفة هي حاصل جمع مصفوفتين إحداهما مصفوفة مثلث علوي والأخرى مصفوفة مثلث سفلي.

تعريف 4.3.4

لنفرض أن W_1 و W_2 فضاءان جزئيان للفضاء الاتجاهي V. يقال بأن V مجموع مباشر (direct sum) $W_1 \oplus W_2$ للفضائين الجزئين W_1 و W_2 إذا وإذا كان فقط:

$$V = W_1 + W_2 \text{ و } W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

تعريف 4.3.4

لنفرض أن V فضاء إتجاهي وأن W_1و W_2 فضاءان جزئيان. $V = W_1 \oplus W_2$ جمع مباشر للفضائين الجزئيين W_1، W_2 إذا وإذا كان فقط كل متجه $V \in V$ له تمثيل وحيد $w_1 + w_2$ حيث $w_1 \in W_1$ و $w_2 \in W_2$.

البرهان

لنفرض أن: $V = W_1 \oplus W_2$

إذا كان: $v \in V$، فإن $v = w_2 + w_2$

حيث:

$$w_1 \in W_2 \text{ و } w_2 \in W_2$$

لنفرض أن: $v = w_3 + w_4$

حيث:

$$w_3 \in W_1 \text{ و } w_4 \in W_2$$

إذن:

$$w_1 + w_2 = w_3 + w_4$$

ومن ذلك:

$$w_1 - w_3 = w_4 - w_2$$

الآن:

$$w_1 - w_3 \in W_1 \text{ و } w_4 - w_2 \in W_2$$

ولكن 0 فقط يوجد في تقاطع W_1 و W_2.

هذا يعني أن:

$$w_1 - w_3 = 0 \text{ و } w_4 - w_2 = 0$$

ومن ذلك:

$w_4 = w_2$ و $w_1 = w_3$

ولهذا فإن التمثيل وحيد.

الآن نفرض أن v لها تمثيل وحيد $v = w_1 + w_2$

حيث:

$w_2 \in W_2$ و $w_1 \in W_1$

من الواضح أن $W_1 \oplus W_2 = V$.

تمارين 3 . 4

1) وضح في كل حالة من الحالات التالية أن المجموعة المعطاة تكون فضاء جزئياً من الفضاء الاتجاهي المذكور.

أ) المجموعة $\{(x_1, 2x_1) : x_1 \in \mathbf{R}\}$، الفضاء الاتجاهي $\mathbf{R}^2$.

ب) المجموعة $\{a_0 - a_1x + 2a_1x^2 : a_0, a_1, \in \mathbf{R}\}$، الفضاء الاتجاهي P_2.

ج) المجموعة $\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} : a \in \mathbf{R}\right\}$، الفضاء الاتجاهي $M_{2\times2}$.

د) المجموعة $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbf{R}\}$، الفضاء الاتجاهي $\mathbf{R}^3$.

2) إذا كانت D_3 هي مجموعة المصفوفات القطرية من نوع 3×3، فهل D_3 فضاء جزئي من $M_{3\times3}$.

3) إذا كانت:

$$W = \{ax + by : a, b \in \mathbf{R}\}$$

حيث y, x في الفضاء الاتجاهي V.

هل W فضاء جزئياً من V.

4) لنفرض أن A مصفوفة من نوع $n \times n$.

هل مجموعة المتجهات x حيث $Ax = x$ تكون فضاء جزئياً من $\mathbf{R}^n$.

5) وضح أن المجموعة

$$\{(x, y, 1) : x, y \in \mathbf{R}\}$$

لا تكون فضاء جزئياً من $\mathbf{R}^3$.

6) وضح أن المجموعة

$$\{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$$

تكون فضاء جزئياً من $\mathbf{R}^3$.

7) إذا كانت $C[0, 1]$، هي مجموعة الدوال المتصلة على الفترة $[0, 1]$، فوضح أن $C[0, 1]$ فضاء جزئياً من الفضاء الاتجاهي للدوال على الفترة $[0, 1]$.

8) إذا كان F هو الفضاء الاتجاهي للدوال من $\mathbf{R}$ إلى $\mathbf{R}$، فوضح أن:

أ) المجموعة $\{f \in F : f(-x) = f(x)\}$ تكون فضاء جزئيا من F.

ب) المجموعة $\{f \in F : f(-x) = -f(x)\}$ تكون فضاء جزئيا من F.

9) إذا كان V هو الفضاء الاتجاهي لكل المصفوفات من نوع $n \times n$، فبرهن أن مجموعة المصفوفات المتماثلة من نوع $n \times n$ تكون فضاءاً جزئياً من V.

10) لنفرض أن B مصفوفة في $M_{n\times n}$.

وضح أن المجموعة $\{A \in M_{n\times n} : AB = BA\}$ فضاء جزئي من $M_{n\times n}$.

4 . 4 التركيبات الخطية والاستقلال الخطي

1 ـ التركيبة الخطية (Linear combination)

إذا كانت $v_1, v_2, \ldots, v_n$ متجهات في الفضاء الاتجاهي V و $K_1, K_2, \ldots, K_n$ إعداد، فإن $K_1v_1 + K_2v_2 + \ldots + K_nv_n$.

تسمى تركيبة خطية للمتجهات $v_1, v_2, \ldots, v_n$

2 ـ المجموعة الناتجة من توليد مجموعة منتهية من المتجهات

لنفرض أن:

$$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

مجموعة منتهية من المتجهات في فضاء اتجاهي V.

المجموعة المتولدة من المجموعة S(span of S) هي مجموعة كل المتجهات التي يمكن التعبير عنها كتركيبة خطية لمتجهات في المجموعة S.

نرمز لهذه المجموعة بالرمز span(S)، أي أن

$$\text{span}(S) = \{w : w = K_1v_1 + K_2v_2 + \ldots + K_nv_n\}$$

مثال 17 :

$$\text{Span}\{1, i\} = \{z : z = x + iy, x, y \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$$

مثال 18 :

وضح أن المجموعة:

$$S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

تولد $\mathbf{R}^3$

الحل

لنفرض أن $u = (x, y, z)$

$$u = x(1, 0, 0), + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

إذن S تولد $\mathbf{R}^3$.

نظرية 4 . 4 . 1

إذا كانت:

$$S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$$

مجموعة منتهية من المتجهات في الفضاء الاتجاهي V، فإن Span(S) فضاء جزئي من V.

البرهان

لبرهنة أن $Span(S)$ فضاء جزئي من V، فلا بد من توضيح أن $Span(S)$ مغلق تحت الجمع والضرب في عدد.

لنفرض أن $w, v \in Span(S)$

$$w = K_1u_1 + K_2u_2 + ... + K_nu_n$$

و

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n$$

حيث $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ و a_i و K_i أعداد،

الآن:

$$w + v = K_1u_1 + K_2u_2 + ... + k_nu_n + a_1u_1 + ... + a_nu_n$$
$$= (K_1 + a_1)u_1 + (K_2 + a_2)u_2 + ...(K_n + a_n)u_n$$

من ذلك نرى أن $w + v$ تركيبة خطية لمتجهات S.

إذن $w + v$ في $Span(S)$.

لنفرض أن K عدد:

$$KW = K(K_1u_1 + ... + K_nu_n)$$
$$= KK_1u_1 + KK_1u_2 + KK_nu_n$$

وهذا يوضح أن KW تركيبة خطية لعناصر S. إذن KW في $Span(S)$

إذن $Span(S)$ فضاء جزئي من V.

3 ـ الاستقلال الخطي والارتباط الخطي:
Linear independence and dependence:

لنفرض أن $v_1, v_2, ..., v_n$ متجهات غير صفرية في الفضاء الاتجاهي V.

إذا كان:

$$K_1v_1 + K_2v_2 + ... + K_nv_n = 0$$

يؤدي إلى أن:

$$K_1 = K_2 = ... = K_n = 0$$

فإن المتجهات $v_1, v_2, ..., v_n$ تكون مستقلة خطياً.

عدا ذلك تكون المتجهات $v_1, v_2, ..., v_n$ مرتبطة خطياً.

بمعنى آخر إذا كان متجهة من هذه المتجهات تركيبة خطية للمتجهات الأخرى. فإن هذه المتجهات تكون مرتبطة خطياً.

لنفرض أن S مجموعة منتهية من المتجهات في فضاء اتجاهي V.

إذا كان $0 \in S$، فإن المجموعة S مرتبطة خطياً، لأنه في هذه الحالة نستطيع ضرب المتجه الصفري في عدد غير صفري وبقية المتجهات في العدد صفر ونتحصل من جمع ذلك على صفر.

إذا احتوت S على عنصرين فقط، لنقل $\{u_1, u_2\}$ حيث $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$ وكان أحدهما مضاعفاً للآخر، فإن المجموعة S تكون مرتبطة خطياً.

السبب في ذلك هو: إذا كان $u_1 = Ku_2$ حيث K عدد، فإن $u_1 + (-K)u_2 = 0$.

نلاحظ من التعريف أن أي مجموعة تحتوي على عنصر واحد غير صفري تكون مجموعة مستقلة، إذا كانت $S = \{u : u \neq 0\}$، فإن $Ku \neq 0$ لا يحدث إلا إذا كان $K = 0$.

في حالة R^n نستطيع تعريف الاستقلال الخطي بدلالة المصفوفات كما يلي:

نفرض أن $v_1, v_2, ..., v_n$ متجهات في R^n.

تكون المصفوفة A والتي أعمدتها المتجهات $v_1, v_2, ..., v_n$ ثم تكون المتجه العمودي.

$$K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix}$$

وبذلك فإن المتجهات $v_1, v_2, ..., v_n$ تكون مرتبطة خطياً إذا وإذا كان فقط هناك حل آخر للنظام $AK = 0$ بالاضافة إلى الحل $K = 0$.

نظرية 4 . 4 . 2

لنفرض أن A مجموعة منتهية من المتجهات غير الصفرية في الفضاء الاتجاهي V، عندئذ توجد مجموعة جزئية B من A مستقلة خطياً لها الخاصية التالية:

$$\text{Span}(A) = \text{Span}(B)$$

البرهان

إذا كانت A مستقلة خطياً، تستطيع فرض $A = B$ ويكون البرهان قد اكتمل.

لنفرض أن A مرتبطة خطياً.

معنى ذلك أنه يوجد على الأقل عنصر واحد في A يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية لباقي العناصر.

لنفرض أن:

$$A = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$$

وأن:

$$u_1 = K_2u_2 + K_3u_3 + ... + K_nu_n$$

لنفرض أن: $B = \{u_2, u_3, ..., u_n\}$

بما أن $B \subset A$، فإن: $\text{Span}\, B \subset \text{Span}\, A$

الذي نريده الآن هو: $\text{Span}(A) \subset \text{Span}(B)$

لنفرض أن: $v \in \text{Span}\, A$

إذن: $v = a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n$

حيث a_i أعداد

$$v = a_1(K_2u_2 + K_3u_3 + ... + K_nu_n) + a_2u_2 + ... + a_nu_n$$
$$= (a_1K_2 + a_2)u_2 + (a_1K_3 + a_3)u_3 + ... + (a_1k_n + a_n)u_n$$

إذن v تركيبة خطية لمتجهات B ومعنى ذلك أن $v \in \text{Span}\, B$ إذن $\text{Span}(A) \subset \text{Span}(B)$.

ومعنى ذلك أن $\text{Span}(A) = \text{Span}(B)$.

إذا كانت B مستقلة خطياً فقد تم البرهان، وإذا كانت B مرتبطة خطياً، فإن نفس الإجراء يتم تكراره.

حيث أن المجموعة التي تحتوي على عنصر واحد غير صفري تكون مجموعة مستقلة، فإن هذا الإجراء سينتهي عاجلاً أو آجلاً.

تمارين 4 . 4

1) وضح أن كل مصفوفة في $M_{2\times 2}$ يمكن التعبير عنها كتركيبة خطية للمصفوفات.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) عبر عن $(9, -1)$ كتركيبة خطية للمتجهين $(1, 1)$ و $(2, -3)$.

3) عبر عن $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ كتركيبة خطية للمصفوفتين

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4) وضح أن $e_1, e_2, \ldots, e_n$ تولد الفضاء $\mathbf{R}^n$.

5) وضح أن المجموعة:

$$\{(2, 1, 1), (-1, 3, 1), (1, -2, -3)\}$$

مجموعة مستقلة خطياً في $\mathbf{R}^3$.

6) وضح أن المجموعة:

$$\{1 + x + x^2, 1 + 2x + 3x^2, 1 + x - x^2\}$$

مجموعة مستقلة خطياً في P_2.

7) وضح أن المجموعة:

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$$

مجموعة مستقلة خطياً في P_n.

8) وضح أن المجموعة:

$$\{(6, 8, 1), (0, 0, 0), (-1, 1, -1)\}$$

مجموعة مرتبطة خطياً في $\mathbf{R}^3$.

9) ما قيم x التي تجعل المجموعة:

$$\{(1, 1, 2), (2, 3, 5), (1, 3, x)\}$$

مجموعة مرتبطة خطياً؟

10) وضح أن المجموعة:

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

تولد فضاء المصفوفات المتماثلة من نوع 2×2.

4 . 5 الأساسيات والأبعاد Bases and dimensions

في هذا الجزء نلقي الضوء على مجموعة جزئية من الفضاء الاتجاهي ذات أهمية كبرى في وصف الفضاء الاتجاهي تسمى أساسية Basis.

في أي فضاء اتجاهي V توجد مجموعة جزئية منتهية في هذا الفضاء تولد الفضاء V ومن نظرية سابقة وجدنا أن أي مجموعة منتهية S تحتوي على مجموعة جزئية B من هذه المجموعة مستقلة خطياً لها الخاصية وهي أن $\mathrm{Span}\, S = \mathrm{Span}\, B$.

من هذا كله نستطيع الوصول إلى تعريف أساسية الفضاء الاتجاهي كما يلي:

تعريف 4 . 5 . 1 (الأساسية Basis)

الأساسية لفضاء اتجاهي V هي مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء V لها خاصيتان هما:

1) هذه المجموعة لا بد أن تكون مستقلة خطياً.

2) هذه المجموعة تولد الفضاء الاتجاهي V.

هذا التعريف يعني أن أي متجه $v \in V$ يمكن التعبير عنه بطريقة وحيدة كتركيبة خطية من المتجهات التي تكون أساسية، فإذا كانت $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ أساسية في الفضاء V، فإن

$v = a_1v_1 + a_2v_2 + ...a_kv_k$.

لأي $v \in V$ حيث $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$.

إذا كان:

$$v = b_1v_1 + K_2v_2 + ... + b_kv_k$$

تمثيل آخر للمتجه V، فإن:

$$\sum_{i=1}^{k}(a_i - b_i)v_i = O$$

وهذا يؤدي إلى أن $a_i - b_i = 0$ لأن $v_1, v_2, ..., v_k$ متجهات مستقلة خطياً، وبذلك فإن $a_i = b_i$ لكل $i = 1, 2, ..., k$.

مثال 19 :

وضح أن المجموعة $A = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ تكون أساسية للفضاء R^n.

الحل

لنفرض أن $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$

$$u_1e_1 = u_1(1, 0, ..., 0) = (u_1, 0, 0, ..., 0)$$
$$u_2e_2 = u_2(0, 1, 0, ..., 0) = (0, u_2, 0, ..., 0)$$
$$\vdots$$
$$u_ne_n = u_n(0, 0, ..., 0, 1) = (0, 0, ..., 0, u_n)$$
$$\begin{aligned} u_1e + u_2e_2 + ... + u_ne_n &= (u_1, 0, ..., 0) + (0, u_2, ..., 0) \\ &+ ... + (0, 0, ..., 0, u_n) \\ &= (u_1, u_2, ..., u_n) \\ &= u \end{aligned}$$

إذن أي متجه $u \in \mathbf{R}^n$ يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية لمتجهات A.

من الواضح أن A مجموعة مستقلة خطياً وبذلك تكون A أساسية للفضاء $\mathbf{R}^n$.

مثال 20 :

وضح أن $B = \{1, x, x^2, ..., x^2\}$ تكون أساسية للفضاء P_n.

الحل

دالة كثيرة الحدود التي درجتها n أو أقل تكون على الشكل

$$P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$$

وبذلك تكون أي دالة كثيرة الحدود في P_n هي تركيبة خطية لمتجهات المجموعة B، ومن الملاحظ أن $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n = 0$. يحدث فقط إذا كان: $a_{09} = a_1 = ... = a_n = 0$.

وبذلك نستطيع استنتاج أن B مستقلة خطياً.

إذن المجموعة A مستقلة خطياً وتولد الفضاء P_n وبذلك تكون أساسية للفضاء P_n.

مثال 21 :

وضح أن المجموعة:

$$A = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

تكون أساسية للفضاء $M_{2\times2}$.

الحـل

لنفرض أن :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}$$

$$a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, + c\begin{bmatrix} o & o \\ 1 & o \end{bmatrix}, + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & o \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

إذن أي مصفوفة في $M_{2\times 2}$ يمكن التعبير عنها كتركيبة خطية لمتجهات المجموعة A ومن الواضح أن المجموعة A مجموعة مستقلة خطياً.

إذن A تكون أساسية للفضاء $M_{2\times 2}$.

مثال 22 :

وضح أن المجموعة :

$$B = \{(1, 1, 1), (2, -1, 2), (-1, -1, -2)\}$$

تكون أساسية للفضاء $\mathbf{R}^3$.

الحـل

لنفرض أن $x = (x_1, x_2, x_3)$

نوضح أولاً أن المتجه x في $\mathbf{R}^3$ هو تركيبة خطية لمتجهات B، أي أن :

$$C_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_3\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

هذا يعني أن :

$$\begin{aligned} C_1 + 2C_2 - C_3 &= x_1 \\ C_1 - C_2 - C_3 &= x_2 \\ C_1 + 2C_2 + 2C_3 &= x_3 \end{aligned}$$

أو بدلالة المصفوفات $AC = x$ حيث

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ و } C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

لكي نوضح أن المتجه x هو تركيب خطي لمتجهات B، فلا بد من توضيح أن النظام $AC = x$ له حل لأي $x \in \mathbf{R}^3$.

ولكي نوضح أن B مستقلة خطياً فلا بد أن نوضح أن النظام $Ax = 0$ له الحل التافه $C = 0$ فقط.

لكن من النظرية الأساسية فإن هذا يعني أن المصفوفة A تكون قابلة للانعكاس ومن ذلك نستنتج أن ذلك يعني أن $|A| \neq 0$.

$$|A| = 9 \neq 0$$

إذن B تكون أساسية للفضاء.

من المثال 18 نلاحظ أن $\{e_1, e_2, e_3\}$ تكون أساسية للفضاء $\mathbf{R}^3$،
ومن المثال 4 نلاحظ أن

$$B = \Big\{(1, 1, 1)1, 1(2, -1, 2)\,(-1, -1, 2)\Big\}$$

تكون أساسية أيضاً للفضاء، $\mathbf{R}^3$.

هذا يعني أنه قد يكون للفضاء الاتجاهي V أكثر من أساسية واحدة، ولكن كما لاحظنا فإن هذه الأساسيات تحتوي على نفس العدد من المتجهات.

نظرية 1.5.4

إذا كانت $A = \{u_1, u_2, ... u_n\}$ أساسية للفضاء الاتجاهي V، فإن أي مجموعة جزئية من V، تحتوي على أكثر من n من المتجهات تكون مرتبطة خطياً.

البرهان

لنفرض أن $A = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ أساسية للفضاء الاتجاهي V وأن $H = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ حيث $m > n$.

كل عنصر من عناصر H يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية لعناصر الأساسية A.

$$v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{n1}u_n$$
$$v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{n2}u_n$$
$$\vdots$$
$$v_m = a_{1m}u_1 + a_{2m}u_2 + \dots a_{nm}u_m$$

لكي نوضح أن H مجموعة مرتبطة خطياً لا بد أن نجد $K_i \neq 0$ لبعض i في المعادلة.

$$K_iv_i + K_2v_2 + \dots + K_mv_m = 0$$

نعوض عن v_i في هذه المعادلات، فنحصل على:

$$K_1(a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{n1}u_n) + K_2(a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{n2}u_n)$$
$$+ \dots\dots\dots + K_m(a_{1m}u_1 + a_{2m}u_2 + \dots + a_{nm}u_n) = 0$$

تجميع المعاملات لكل u_i يعطينا

$$(a_{11}K_1 + a_{12}K_2 + \dots + a_{1m}K_m)u_1 + (a_{21}K_1 + a_{22}K_2 + \dots + a_{2m}K_m)u_2$$
$$+ \dots\dots\dots + (a_{n1}K_1 + a_{n2}K_2 + \dots + a_{nm}K_m)u_n = 0$$

حيث أن A مستقلة خطياً، فإن هذا يعني أن كل المعاملات تساوي صفر، أي أن

$$a_{11}K_1 + a_{12}K_2 + \dots + a_{1m}K_n = 0$$
$$a_{21}K_1 + a_{22}K_2 + \dots + a_{2m}K_n = 0$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}K_1 + a_{n2}K_2 + \dots + a_{nm}K_n = 0$$

هذا النظام المتجانس في n من المعادلات و m من المتغيرات (في هذه الحالة المتغيرات $(K_1, K_2, ..., K_m$) لا بد أن يكون له حل غير تافه لأن عدد المتغيرات أكثر من عدد المعادلات.

هذا يعني أن هناك حل غير تافه $(K_1, K_2, ..., K_m)$، أي أن هناك $K_i \neq 0$ لبعض i. وهذا يثبت أن H مجموعة مرتبطة خطياً.

نظرية 2.5.4

إذا كانت:

$A_2 = \{v_1, v_2, ..., v_K\}$ و $A_1 = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$

أساسيتين في فضاء اتجاهي V، فإن $n = K$.

البرهان

لنفرض أن $K > n$.

A أساسية للفضاء الاتجاهي V، هذا يؤدي إلى أن A_2 مجموعة مرتبطة خطياً لأنها تحتوي على أكثر من n من العناصر (النظرية السابقة)، ولكن هذا يناقض الحقيقة وهي أن A_2 أساسية للفضاء V. إذن نستنتج أن $K \leq n$.

بنفس الطريقة إذا فرضنا أن $K < n$، فإننا نحصل على أن $K \geq n$ وذلك بتغيير وظيفة A_1 و A_2 في البرهان السابق. هذا يقودنا إلى الاستنتاج وهو أن $K = n$.

بعد الفضاء الاتجاهي Dimension of a vector space

يسمى الفضاء الاتجاهي الذي يحتوي على أساسية منتهية (أي الأساسية تحتوي على عدد نهائي من العناصر) بالفضاء منتهى البعد Finite dimension.

تعريف 2.5.4

بعد الفضاء الاتجاهي V هو عدد عناصر الأساسية في الفضاء V، نرمز لذلك بالرمز بعد (V).

الفضاء الاتجاهي الصفري {0} له بعد يساوي صفراً.

إذا لم يحتوي الفضاء الاتجاهي غير الصفري V على أساسية منتهية، فإن V يسمى فضاء اتجاهياً لا نهائي البعد.

الفضاء الصفري {0} هو الفضاء الاتجاهي الوحيد منتهي البعد الذي لا يحتوي على أساسية.

النظرية التالية توضح العلاقة بين عناصر مجموعة جزئية من الفضاء الاتجاهي V الذي بعده n والارتباط الخطي للمجموعة.

نظرية 3.5.4

لنفرض أن S مجموعة جزئية من الفضاء الاتجاهي V تحتوي على m من المتجهات.

إذا كان بعد $(V) = n$ وإذا كان $m > n$، فإن S مجموعة مرتبطة خطياً.

البرهان

حيث أن بعد $(V) = n$، فإنه توجد أساسية للفضاء V تحتوي على n من المتجهات.

إذن من نظرية سابقة نجد أن S مجموعة مرتبطة خطياً لأن $m > n$.

نستطيع القول بأنه في الفضاء الاتجاهي الذي بعده n لا توجد مجموعة جزئية مستقلة خطياً تحتوي على أكثر من n من العناصر، كذلك نستطيع القول بأن مثل هذا الفضاء لا يحتوي على مجموعة جزئية تحتوي على عدد أقل من n من العناصر يمكن أن تولد الفضاء V.

نظرية 4 . 5 . 4

لنفرض أن $A = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ مجموعة جزئية مستقلة خطياً في الفضاء الاتجاهي V حيث بعد $(V) = n$.

إذا كان $m < n$، فإن هناك أساسية للفضاء V تحتوي على المجموعة A.

البرهان

لنفرض أن $v_1 \in V$ حيث v_1 متجه غير صفري لا يوجد في $\text{Span}(A)$.

المجموعة $A_1 = \{u_1, u_2, ... u_m, v_1\}$ مجموعة مستقلة خطياً.

إذا كان $\text{Span}(A_1) = V$، فإن A_1 تكون أساسية للفضاء V تحتوي على A، وإذا كان $\text{Span}(A_1) \neq V$، فإن هناك متجهاً غير صفري $v_2 \in V$ لا يوجد في $\text{Span}(A_1)$.

المجموعة $A_2 = \{u_1, u_2, ..., u_m, v_1, v_2\}$ مستقلة خطياً.

إذا كان $\text{Span}(A_2) = V$، فإن A_2 تكون أساسية للفضاء V تحتوي على A، وإذا كان $\text{Span}(A_2) \neq V$، فإن العملية تتكرر حتى نصل إلى

$$A_{n-m} = \{u_1, u_2, ..., u_m, v_1, v_2, ..., v_{n-m}\}$$

والتي تكون مجموعة مستقلة وبذلك تكون أساسية للفضاء V تحتوي على A.

مما سبق نستطيع استنتاج أن أي مجموعة مستقلة خطياً في الفضاء الاتجاهي V يمكن توسيعها لكي تصبح أساسية، وأي مجموعة تولد الفضاء V يمكن تقليصها لتصبح أساسية.

من هذا كله نستنتج أن الأساسية هي أكبر مجموعة مستقلة في الفضاء الاتجاهي وتولده.

تمارين 4 . 5

1) وضح أن

$$B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$$

تكون أساسية للفضاء $\mathbf{R}^3$.

2) وضح أن

$$B = \{(3, 4), (1, 1)\}$$

تكون أساسية للفضاء $\mathbf{R}^2$ وعبر عن $(1, 2)$ كتركيبة خطية لعناصر B.

3) وضح أن

$$B = \{1 - x, x - x^2, 1 + x^2\}$$

تكون أساسية للفضاء P_2 وعبر عن $3 + x + 4x^2$ كتركيبة خطية لعناصر B.

4) أوجد أساسية للفضاء $M_{3\times2}$. ما هو بعد الفضاء $M_{3\times2}$ ؟

5) إذا كان V فضاء اتجاهياً منتهى البعد، فبرهن أن الفضاء الجزئي W للفضاء V يكون له بعد منته.

6) إذا كان:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ b & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

فضاء جزئي للفضاء الاتجاهي $M_{2\times 2}$، فأوجد أساسية للفضاء الجزئي W.

7) وضح أن:

$$B = \{(2, -1), (4, -1)\}$$

تكون أساسية للفضاء $\mathbf{R}^2$ وعبر عن $(1, 2)$ كتركيبة خطية لعناصر B.

8) أوجد أساسية للفضاء $M_{2\times 3}$.

9) إذا كان W_1, W_2 فضائين جزئيين من فضاء اتجاهي V و $W_1 \subset W_2$ وبعد W_1 = بعد W_2، فوضح أن $W_1 = W_2$.

10) لنفرض أن H فضاء جزئي من فضاء اتجاهي V ذو بعد نهائي. وضح أن هنـاك فـضـاء جـزئـي K مـن V بـحـيـث أن $H \cap k = \{0\}$ و $H + K = V$.

4 . 6 فضاء الصف وفضاء العمود Row and column spaces

يناظر كل مصفوفة A فضائين اتجاهين هما فضاء الصف للمصفوفة A وفضاء العمود للمصفوفة A.

لنفرض أن:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

مصفوفة من نوع $m \times n$ حيث مداخلها أعداد حقيقية ولنفرض أن $R_i = [a_{i1} a_{i2} \dots a_{in}]$ (حيث $1 \le i \le m$) هي صفوف المصفوفة A، وأن

$$C_J = \begin{bmatrix} a_{1J} \\ a_{2J} \\ \vdots \\ a_{mJ} \end{bmatrix}$$

حيث $1 \le J \le n$ أعمدة المصفوفة A.

الفضاء الجزئي المتولد بالمجموعة $\{R_1, R_2, \dots, R_m\}$ يسمى فضاء الصف للمصفوفة A (Row Space of) وهو فضاء جزئي من $\mathbf{R}^n$ ويرمز له بالرمز $R(A)$.

الفضاء الجزئي المتولد بالمجموعة $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ يسمى فضاء العمود للمصفوفة A (culomn Space of) وهو فضاء جزئي من $\mathbf{R}^m$ ويرمز له بالرمز $R(A^T)$.

مثال 23:

أوجد فضاء الصف وفضاء العمود للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل

فضاء الصف للمصفوفة A هو الفضاء المتولد بصفوف المصفوفة A.

$$R(A) = \text{Span}\{(1, -2, 3), (2, 4, -1)\}$$

وهو فضاء جزئي من $\mathbf{R}^3$.

أما فضاء العمود للمصفوفة A فهو:

$$R(A^T) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right\}$$

وهو فضاء جزئي من R^2.

لاحظ في هذا المثال أن $R(A^T)$ فضاء جزئي من R^2، ولذلك فإن:

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right\}$$

ليست مستقلة خطياً، ولهذا فإن هذه الأعمدة لا تكون أساسية لفضاء العمود للمصفوفة A.

المصفوفة المختزلة Reduced Matrix

المصفوفة المختزلة هي المصفوفة التي تتصف بما يلي:

1) الصف الصفري يكون أسفل أي صف آخر يحتوي على مدخل واحد (على الأقل) غير صفري.

2) أول عنصر غير صفري في الصف يكون العدد 1.

3) العمود الذي يحتوي على أول عنصر غير صفري في الصف وهو العدد 1 يكون أعلاه وأسفله أصفاراً.

4) أول عنصر غير صفري في الصف وهو العدد 1 يقع على يمين أول عدد غير صفري وهو العدد 1 في الصف السابق.

مثال 24:

المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 2\\0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -6\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

مصفوفة مختزلة:

إذا كانت A مصفوفة، فإن العمليات البسيطة على صفوف المصفوفة A والتي تحولها إلى المصفوفة المختزلة لا تغير فضاء الصف للمصفوفة A، بمعنى آخر فضاء الصف للمصفوفة A هو نفسه فضاء الصف للمصفوفة المختزلة من A.

هناك خاصية تمتاز بها المصفوفة المختزلة وهي أن صفوفها غير الصفرية تكون مستقلة خطياً وبالتالي تصلح لأن تكون (أي صفوف المصفوفة المختزلة) أساسية لفضاء الصف للمصفوفة.

مثال 25:

أوجد أساسية لفضاء الصف للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 0 & 3\\2 & -5 & -3 & -2 & 6\\0 & 5 & 15 & 10 & 0\\2 & 6 & 18 & 8 & 6\end{bmatrix}$$

الحـل

نحول المصفوفة A إلى الصورة المختزلة وذلك بعمليات بسيطة على صفوف A.

1) ضرب الصف الأول في 2 وضرب الصف الثاني في (1 −) وجمعهما للحصول على الصف الثاني.

ضرب الصف الأول 2 وضرب الصف الرابع في (1-) وجمعها للحصول على الصف الرابع.

$$\xrightarrow[2R_1 - R_4 = R_4]{2R_1 - R_2 = R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 0 & -10 & -18 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

2) ضرب الصف الثاني في 5 وضرب الصف الثالث في (1 −) وجمعها للحصول على الصف الثالث.

ضرب الصف الثاني في 10 وجمعه إلى الصف الرابع للحصول على الصف الرابع.

3) تغيير الصف الثالث بالصف الرابع.

$$\xrightarrow[10R_2 - R_4 = R_4]{5R_2 - R_3 = R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 12 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) ضرب الصف الثالث في $\frac{1}{12}$ للحصول على الصف الثالث وضرب الصف الثاني في 2 وجمعه للصف الأول للحصول على الصف الأول.

5) ضرب الصف الثالث في (3 −) وجمعه إلى الصف الثاني للحصول على الصف الثاني.

$$\xrightarrow[R_1 = 2R_2 + R_1]{\frac{1}{12}R_3 = R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 = -3R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6) ضرب الصف الثالث في (6 −) وجمعه إلى الصف الأول للحصول على الصف الأول يوصلنا إلى المصفوفة المختزلة.

$$\xrightarrow{R_1 = -6R_3 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إذن متجهات الصفوف للمصفوفة المختزلة $(1, 0, 0 - 2, 3)$، $(0, 1, 0, -1, 0)$ ، $(0, 0, 1, 1, 0)$ هي أساسية لفضاء الصف للمصفوفة A.

أي أن:

$$R(A) = \text{Span}\left\{(1, 0, 0, -1, 3), (0, 1, 0, -1, 0), (0, 0, 1, 1, 0)\right\}$$

تعريف 1.6.4

لنفرض أن A مصفوفة من نوع $m \times n$.

رتبة المصفوفة A (Rank of) هو عدد المصفوفة المستقلة خطياً في المصفوفة المختزلة من المصفوفة A.

النظرية التالية توضح العلاقة بين بعد فضاء الصف وبعد فضاء العمود للمصفوفة A ومقارنة ذلك برتبة المصفوفة A.

نظرية 1.6.4

إذا كانت A مصفوفة من نوع $m \times n$، فإن بعد $R(A)$ = بعد $R(A^T)$ = رتبة المصفوفة A.

مثال 26 :

في المثال السابق أوجد رتبة المصفوفة A وعين أساسية للفضاء $R(A^T)$.

الحل

حيث إن المصفوفة المختزلة من المصفوفة A تحتوي على ثلاثة صفوف مستقلة خطياً، فإن رتبة المصفوفة $A = 3$.

أساسية الفضاء $R(A^T)$ هي الأعمدة في A والتي تقابل الأعمدة المستقلة خطياً في المصفوفة المختزلة من A وهي الأعمدة الأولى من المصفوفة المحايدة.

إذن أساسية الفضاء $R(A^T)$ هي:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 15 \\ 18 \end{bmatrix} \right\}$$

إذن:

$$R(A^T) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 15 \\ 18 \end{bmatrix} \right\}$$

نظرية 2.6.4

لنفرض أن B هي المصفوفة المختزلة من A.

الأعمدة في A والتي تناظر الأعمدة المختلفة من المصفوفة المحايدة في B تكون أساسية لفضاء العمود للمصفوفة A.

مثال 27 :

أوجد أساسية لفضاء العمود للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

الحل

المصفوفة المختزلة من المصفوفة A هي:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إذن العمود الأول والثاني والرابع في المصفوفة A والتي تناظر أعمدة المصفوفة المحايدة في B هي التي تكون أساسية للفضاء $R(A^T)$.

إذن:

$$R(A^T) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

مما سبق نستطيع إيجاد أساسية للفضاء المتولد من أي مجموعة منتهية من المتجهات في R^n.

لنفرض أن:

$$S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$$

نكون أولاً المصفوفة A والتي من نوع $m \times n$.

كل متجه من المتجهات في S يكون صفاً في المصفوفة A.

$$A = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

بعدئذ تحول المصفوفة A إلى المصفوفة B المختزلة من A. الصفوف غير الصفرية في B تكون أساسية للفضاء المتولد من S.

مثال 28:

أوجد أساسية للفضاء المتولد من المجموعة:

$$S = \{(1, -1, 2, 3), (-2, 3, -1, -4), (1, 2, 1 - 1)\}$$

الحـل

القيام بعمليات بسيطة على المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

يوصلنا إلى المصفوفة المختزلة:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ومن ذلك تكون المجموعة:

$$\{(1, 0, 5, 5), (0, 1, 3, 2)\}$$

أساسية للفضاء المتولد من S.

تمارين 4 . 6

1) أوجد أساسية لكل من:

أ) فضاء الصف.

ب) فضاء العمود.

للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

2) أوجد أساسية لكل من:

أ) فضاء الصف.

ب) فضاء العمود.

للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 17 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 10 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 13 & 4 \end{bmatrix}$$

3) لنفرض أن A مصفوفة من نوع $n \times n$ قابلة للانعكاس. وضح أن $R(A) = \mathbf{R}^n$.

٤) إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

فأوجد أساسية لفضاء العمود للمصفوفة A، وأوجد كذلك رتبة A.

5) إذا كانت A مصفوفة من نوع $m \times n$، فوضح أنه إذا كان:

أ) $m < n$، فإن أعمدة A تكون مرتبطة خطياً.

ب) $n < m$، فإن صفوف A تكون مرتبطة خطياً.

6) برهن النظرية 4 . 6 . 1.

7) برهن النظرية 4 . 6 . 2.

4 . 7 الحل لعدد m من المعادلات في n من المجاهيل

ندرس الآن نظام m من المعادلات في n من المجاهيل والذي على الشكل.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

والذي يمكن التعبير عنه بطريقة المصفوفات على شكل

$$Ax = b$$

حيث:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

و

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ و } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

نبدأ أولاً بالنظام:

1) $Ax = 0$

إذا كانت B هي المصفوفة المختزلة من المصفوفة A، فإن هذا النظام يكافي النظام $Bx = 0$.

لنفرض أن رتبة المصفوفة A هي r.

أ) إذا كان $r = n$، فإن ذلك يعني أن $B = I_n$

وبالتالي فإن الحل هو:

$$x = 0$$

ب) إذا كان $r < n$.

ندرس المثال التالي:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 5x_4 &= 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ومن ذلك نجد أن:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

وبذلك تكون المصفوفة المختزلة B هي:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إذن رتبة A تساوي عدد الصفوف المستقلة في المصفوفة B، أي أن $r = 2$.

تقسم المتغيرات إلى:

1) متغيرات أساسية وهي المتغيرات التي تقابل أعمدة المصفوفة المحايدة في المصفوفة B.

ففي هذه الحالة المتغيرات الأساسية هي x_1 و x_3 والتي تقابل العمود الأول والثالث في المصفوفة B.

2) متغيرات حرة وهي المتغيرات التي تقابل باقي الأعمدة في المصفوفة B.

ففي هذه الحالة المتغيرات الحرة هي x_2 وx_4 التي تقابل العمود الثاني والرابع في المصفوفة B.

لإيجاد الحل العام للنظام $Bx = 0$ والذي يكافىء النظام $Ax = 0$ تعطي المتغيرات الحرة قيم اختيارية.

في هذه الحالة نفرض أن $x_2 = t_1$ و $x_4 = t_2$.

نجد الآن الحل بدلالة المتغيرات الحرة.

من النظام $Bx = 0$ يكون لدينا.

$$x_1 + 3x_2 + x_4 = 0$$
$$x_3 + \frac{1}{3}x_4 = 0$$

من المعادلة الأخيرة:

$$x_3 = -\frac{1}{3}t_2$$

ومن المعادلة الأولى:

$$x_1 = -3t_1 - t_2$$

إذن:

$$= t_1\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

إذن كان $t_1 = 1$ و $t_2 = 0$، فإن:

$$x = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وهو حل خاص للنظام المعطي.

وإذا كان $t_1 = 0$ و $t_2 = 1$، فإن

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

وهو حل آخر خاص.

من الواضح أن الحلول الخاصة تكون مستقلة خطية وكل الحلول الأخرى هي تركيبات خطية للحلول الخاصة.

ملاحظة:

مجموعة كل الحلول للنظام $Ax = 0$ تكون ما يسمى بالفضاء الصفري (Nullspace) للمصفوفة A والذي بعده يساوي عدد المتغيرات الحرة.

نظرية 1.7.4

مجموعة كل الحلول لنظام m من المعادلات في n من المجاهيل

$$Ax = 0$$

عندما تكون رتبة A أقل من n$(r < n)$ هي مجموعة كل التركيبات الخطية للحلول الخاصة المستقلة خطياً.

نظرية 2.7.4

النظام $Ax = 0$ له حل آخر بالاضافة إلى الحل التافه $x = 0$ إذا وإذا كانت فقط رتبة A أقل من عدد المتغيرات.

مثال 29 :

حل النظام

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 0$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 + 13x_2 - 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 0$$

الحل

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 13 & -8 & -5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المختزلة من المصفوفة A هي

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{14}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إذن المتغيرات الأساسية هي x_1, x_2.

والمتغيرات الحرة هي x_3, x_4, x_5

لنفرض أن $x_5 = t_3, x_4 = t_2, x_3 = t_1$ ومن ذلك نجد من النظام $Bx = 0$ أن:

$$x_1 = \left(\frac{1}{5}\right)t_1 - \left(\frac{14}{5}\right)t_2 - \left(\frac{1}{5}\right)t_3$$

$$x_2 = \left(\frac{3}{5}\right)t_1 + \left(\frac{3}{5}\right)t_2 - \left(\frac{3}{5}\right)t_3$$

أي أن:

$$x = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{5}\right)t_1 - \left(\frac{14}{5}\right)t_2 - \left(\frac{1}{5}\right)t_3 \\ \left(\frac{3}{5}\right)t_1 \quad \left(\frac{3}{5}\right)t_2 - \left(\frac{3}{5}\right)t_3 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$$

$$= t_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -\frac{14}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الحلول الخاصة والتي تكون أساسية للفضاء الصفري للمصفوفة A هي:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{14}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

والتي يمكن الحصول عليها أولاً بوضع.

$$t_3 = 0, t_2 = 0, t_1 = 1$$

ثم بوضع:

$$t_3 = 0, t_2 = 1, t_1 = 0$$

وأخيراً بوضع:

$$t_3 = 1, t_2 = 0, t_1 = 0$$

وباقي الحلول هي تركيبات خطية لهذه الحلول الخاصة.

ملاحظة:

إذا كان عدد المتغيرات في النظام $Ax = 0$ هو n وكانت رتبة المصفوفة A هي r، فإن عدد الحلول الخاصة للنظام $Ax = 0$ هو $n - r$.

2.) النظام $Ax = b$ حيث $b \neq 0$

لحل هذا النظام نكون أولاً المصفوفة [A : b] ثم تحويلها إلى مصفوفة مختزلة.

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} & & b_1 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} & & b_2 \\ & & \vdots & & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{rk} & \cdots & a_{rn} & & b_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0\ 0 & \cdots 0 & b_{r+1} \\ & & \vdots & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0\ 0\ 0\ 0 & & 0 & & & b_m \end{array}\right]$$

النظام $Ax = b$ متناسق إذا كان $b_{r+1} = \dots = b_m = 0$.

في هذه الحالة يمكن حل النظام في r من المتغيرات بدلالة المتغيرات الأخرى والتي عددها: $n - r$.

نظرية 3.7.4

النظام $Ax = b$ يكون متناسقاً إذا وإذا كانت فقط مصفوفة المعاملات A والمصفوفة $[A : b]$ لهما نفس الرتبة.

مثال 30:

حل النظام:

$$x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1$$

$$x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 4x_4 = -1$$

الحـل

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -10 & 4 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

تكون المصفوفة $[A : b]$ والتي هي

$$[A : b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -10 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المختزلة للمصفوفة $[A : b]$ هي

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \left(-\frac{2}{3}\right) & 0 & \left(\frac{1}{3}\right) \\ 0 & 1 & \left(-\frac{7}{3}\right) & 1 & \left(-\frac{1}{3}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لنفرض أن $x_4 = t_2, x_3 = t_1$ ومن ذلك نجد أن

$$x_1 = \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)t_1$$

$x_2 = \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{7}{3}\right)t_1 - t_2$.

وبذلك فإن:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{43} \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)t_3 \\ \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{7}{3}\right)t_1 - t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أنه إذا كان $t_2 = t_1 = 0$، فإن:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

يكون حلاً خاصاً للنظام $Ax = b$.

وكذلك نلاحظ أن:

$$x = t_1 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حل كامل (كل الحلول) للنظام $Ax = 0$.

من ذلك نستنتج أن الحل الكامل (كل الحلول) للنظام $Ax = b$ هو مجموع حل خاص للنظام $Ax = b$ وكل الحلول للنظام $Ax = 0$

نظرية 4.7.4

الحل الكامل للنظام غير المتجانس $Ax = b$ هو مجموع أي حل خاص للنظام المعطى وكل الحلول للنظام المتجانس $Ax = 0$

البرهان

لنفرض أن x_1 هو أي حل خاص للنظام $Ax = b$ وهذا يعني $Ax_1 = b$.

لنفرض أن z أي حل للنظام $Ax = b$ وهذا يعني أن $Az = b$.

إذن $Az = Ax_1$ وبذلك $A(z - x) = 0$.

وهذا يعني أن $z - x_1$ حل للنظام $A(z - x) = 0$.

إذا كان $\bar{x} = z - x_1$، فإن:

$$z = x_1 + \bar{x}$$

وبذلك فإن أي حل للنظام $Ax = b$ هو مجموع حل خاص x_1 وكل الحلول للنظام $Ax = 0$ وهو $\bar{x}$.

للتأكد من ذلك نلاحظ أن

$$Az = A(x_1 + \bar{x}) = Ax_1 + A\bar{x} = Ax_1 + 0$$
$$= Ax_1 = b$$

وهذا يعني أن $Az = b$.

تمارين 7.4

حل الأنظمة التالية:

1)
$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$
$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

2)
$$-3x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 4$$
$$2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 4$$
$$-x_3 + 5x_4 = 4$$

3) ما هي قيمة t حتى يكون للنظام

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$
$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$$
$$tx_1 + 7x_2 + x_3 = 0$$

حل آخر بالاضافة إلى الحل التافه.

4) برهن النظرية 2.7.4.

5) برهن النظرية 3.7.4.

تمارين الفصل الرابع

1) عبر عن $(2, 3, -4)$ كتركيبة خطية للمتجهات $(1, -1, 0), (2, 0, 1), (0, 1, 1)$.

2) عبر عن $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ كتركيبة خطية للمتجهات:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3) وضح أن:

$$V = \{(0, x) : x \in \mathbf{R}\}$$

فضاء جزئي من $\mathbf{R}^2$:

4) وضح أن:

$$M_a = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a & 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbf{R} \right\}$$

فضاء جزئي من $M_{2\times 2}$.

5) إذا كان:

$$A = \left\{ p \in P_2 : \int_{-2}^{2} p(x)dx = 0 \right\}$$

فبرهن أن A فضاء جزئي من P_2.

6) إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

فأوجد:

أ) أساسية للفضاء $R(A)$.

ب) أساسية للفضاء $R(A^T)$.

ج) رتبة المصفوفة A.

7) إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فأوجد:

أ) أساسية للفضاء $R(A)$.

ب) أساسية للفضاء $R(A^T)$.

ج) رتبة المصفوفة A.

8) لنفرض أن A مصفوفة مربعة من نوع $n \times n$.

إذا كان:

$$B = \{x \in \mathbf{R}^n : \mathbf{A}x = 2x\}$$

فبرهن أن B فضاء جزئي من $\mathbf{R}^n$.

9) إذا كانت $u = (2, 1, 2, 3, 10, 3)$. فأوجد:

أ) $\| u \|$ ب) متجه الوحدة في اتجاه u.

10) إذا كـان $u = (x, 1, 2, 2)$, $v = (-1, 2, -5, x)$ وكـان $u.v = 0$ فأوجد قيم x.

11) برهن أن:

$$\| u + v \|^2 + \| u - v \|^2 = 2 \| u \|^2 + 2 \| v \|^2$$

12) برهن أن:

$$u.v = (\| u + v \|^2 - \| u - v \|^2$$

13) برهن أن $u.v = 0$ إذا وإذا كان فقط

$$\| u + v \|^2 = \| u \|^2 + \| v \|^2$$

14) اكتب كثيرة الحدود $p(x) = x^4 + 4x - 3$ كتركيبة خطية للدوال كثيرة الحدود.

$$q(x) = x^2 - 2x + 5 \quad \text{و} \quad r(x) = 2x^2 - 3x \quad \text{و} \quad h(x) = x + 3$$

15) برهن أن $u.v = v.u$.

16) برهن أنه إذا كان $u \in \mathbf{R}^n$، فإنه يمكن التعبير عن u كتركيبة خطية للمتجهات $e_1, e_2, \dots, e_n$.

17) إذا كان $p(x), q(x), r(x) \in p_n$، فبرهن أن:

$$\langle p(x) + q(x), r(x) \rangle = \langle p(x), r(x) \rangle + \langle q(x), r(x) \rangle$$

18) هل المجموعة:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} : a \in \mathbf{R} \right\}$$

تكون فضاء جزئياً من $M_{2 \times 2}$ ؟

19) لنفرض أن N مجموعة جزئية من $M_{3 \times 3}$ تتكون من المصفوفات المتماثلة من نوع 3×3 والقابلة للانعكاس.

هل N تكو فضاءاً جزئياً من $M_{3 \times 3}$ ؟

20) لنفرض أن U مجموعة جزئية من $M_{3 \times 3}$ تتكون من مصفوفات المثلث

العلوي التي من نوع 3 × 3.

هل U تكون فضاءاً جزئياً من $M_{3\times3}$ ؟

21) لنفترض أن { دالة حقيقية زوجية $f : f\} = E$.

هل E فضاء جزئي من فضاء كل الدوال الحقيقية؟

22) لنفترض أن A مجموعة جزئية من B و B مجموعة جزئية من فضاء V.

أ) إذا كان B فضاء جزئياً من V و A فضاء جزئياً من B، فهل A فضاء جزئي من V ؟

ب) إذا كان B فضاء جزئياً من V و A فضاء جزئيا من V، فهل A فضاء جزئي من B ؟

23) أوجد قيم x التي تجعل المجموعة $\{(1, x), (x, 1)\}$ مرتبطة خطياً.

24) لنفترض أن:

$$A = \{(x, y, 1) : x, y \in \mathbf{R}\}$$

هل A تكون فضاء جزئياً من $\mathbf{R}^3$ ؟

25) لنفترض أن:

$$B = \{(x, y, x - y, x + 2y) : x, y \in \mathbf{R}\}$$

هل B تكون فضاء جزئياً من $\mathbf{R}^4$ ؟

26) لنفترض أن:

$$W = \left\{\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbf{R}\right\}$$

هل W تكون فضاء جزئياً من $M_{2\times3}$ ؟

27) لنفترض أن

$$A = \{(a, b, c) : a + b + c = 0\}$$

هل A تكون فضاء جزئياً من $\mathbf{R}^3$ ؟

الفصل الخامس:

فضاء الضرب الداخلي

Inner product space

تعرفنا في الفصول السابقة على الضرب الداخلي لمتجهات في الفضاء R^n.
الآن نعمم فكرة الضرب الداخلي إلى فضاءات أكثر شمولية من الفضاء R^n معتمدين في تعميمنا هذا على خواص الضرب الداخلي في الفضاء R^n.

1.5 الطول والمسافة

تعريف (الضرب الداخلي)

الضرب الداخلي على فضاء اتجاهي V هو دالة $< , > : V \to R$ تحدد لكل زوج من المتجهات u, v في V عدداً حقيقياً $< u, v >$ يحقق الشروط التالية:

1) $< u, u > \geq 0$ ويكون $< u, u > = 0$ إذا وإذا كان فقط $u = 0$.

2) $< u, v > = < v, u >$ لكل $u, v \in V$.

3) $< u, v + w > = < u, v > + < u, w >$.

4) $a < u, v > = < au, av >$ لكل كمية عددية a.

الفضاء الاتجاهي V مع عملية الضرب الداخلي هذه يسمى فضاء الضرب الداخلي.

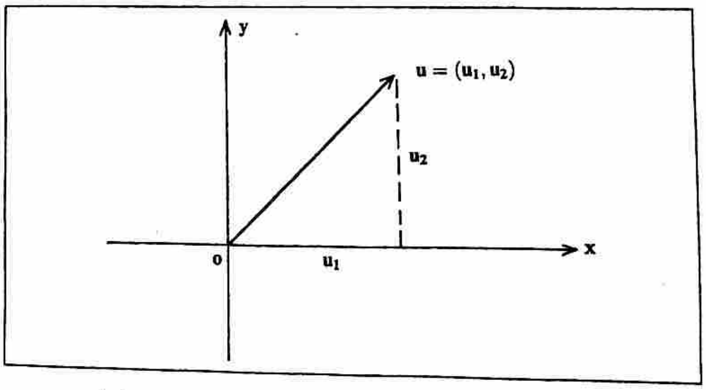
تعريف الطول والمسافة في فضاء الضرب الداخلي هو امتداد لتعريف الطول والمسافة في R^n.

طول أو نظيم (norm) المتجه u في فضاء الضرب الداخلي V يعرف كما يلي:

$$\| u \| = \sqrt{< u, u >}$$

في حالة R^2 نجد أن نظيم المتجه u هندسياً يوضح بالصورة التالية

$$\| u \| = \sqrt{< u, u >} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$



والمسافة بين متجهين في فضاء الضرب الداخلي تعرف كما يلي:

$$d(u, v) = \| u - v \|$$

إذا كان $\| u \| = 1$، فإن المتجه u يسمى متجه الوحدة، وإذا كان u متجهاً غير صفري، فإن $\frac{u}{\| u \|}$ هو متجه الوحدة في اتجاه u.

هناك بعض النتائج المهمة في فضاء الضرب الداخلي من بينها متباينة كوشي - شوارتز والتي لها أهمية كبيرة في الكثير من التطبيقات.

نظرية 1.1.5 (متباينة كوشي - شوارتز)

إذا كان u, v متجهين في فضاء الضرب الداخلي V، فإن:

$$| < u, v > | \leq \| u \| \| v \|$$

البرهان:

إذا كان u, v متجهي وحدة، فإن:

$$\begin{aligned} \| u - v \|^2 &= < u - v, u - v > \\ &= < u - v, u > - < u - v, v > \\ &= < u, u > - < v, u > - < u, v > + < v, v > \end{aligned}$$

من خواص الضرب الداخلي

$$\begin{aligned} &= < u, u > - < u, v > - < u, v > + < v, v > \\ &= < u, u > - 2 < u, v > + < v, v > \\ &= \| u \|^2 - 2 < u, v > + \| v \|^2 \\ &= 2 - 2 < u, v > \end{aligned}$$

حيث إن $\| u - v \|^2 \geq 0$، فإن:

$$< u, v > \leq 1 \quad (1)$$

حيث إن u متجه وحدة، فإن $-u$ متجه وحدة أيضاً، وبذلك فإن

$$< -u, v > = - < u, v > \leq 1$$

وهذا يؤدي إلى أن:

$$< u, v > \geq -1 \quad (2)$$

من (1) و(2) نجد أن

$$-1 \le \langle u, v \rangle \le 1$$

وهذا يعني أن:

$$|\langle u, v \rangle| \le 1$$

حيث $\| u \| = 1$ و $\| v \| = 1$ فإن $\| u \| \| v \| = 1$

ومن ذلك نجد أن:

$$|\langle u, v \rangle| \le \| u \| \| v \|$$

الآن لنفرض أن v, u متجهين غير صفريين.

لاحظ أن:

$$\frac{u}{\| u \|}, \frac{v}{\| v \|}$$

متجهي وحدة وبذلك يكون الاستنتاج السابق صحيحاً على المتجهين.

$$\frac{u}{\| u \|}, \frac{v}{\| v \|}$$

أي أن:

$$|\langle \frac{u}{\| u \|}, \frac{v}{\| v \|} \rangle \le 1$$

الآن من خواص الضرب الداخلي نجد أن:

$$\langle \frac{u}{\| u \|}, \frac{v}{\| v \|} \rangle = \frac{1}{\| u \| \| v \|} \langle u, v \rangle$$

إذن:

$$|\langle u, v \rangle| \le \| u \| \| v \|$$

وأخيراً إذا كان $u = 0$ أو $v = 0$، فإن:

$$\| u \| \| v \| = 0$$

وكذلك: $\langle u, v \rangle = 0$

ويكون استنتاجنا:

$$|\langle u, v \rangle| \; \| u \| \| v \|$$

لأي متجهين u, v في فضاء الضرب الداخلي V.

نظرية 2.1.5 (المتباينة المثلثية)

إذا كان u و v متجهين في فضاء الضرب الداخلي V، فإن:

$$\| u + v \| \le \| u \| + \| v \|$$

البرهان

$$\| u + v \|^2 = \langle u + v, u + v \rangle$$
$$= \langle u + v, u \rangle + \langle u + v, v \rangle$$

من خواص الضرب الداخلي

$$= \langle u, u \rangle + \langle v, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle$$
$$= \| u \|^2 + 2 \langle u, v \rangle + \| v \|^2$$
$$\le \| u \|^2 + 2 \| u \| \| v \| + \| v \|^2 = (\| u \| + \| v \|)^2$$

إذن:

$$\| u + v \|^2 \le (\| u \| + \| v \|)^2$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين ورفض الإشارة السالبة نجد أن

$$\| u + v \| \le \| u \| + \| v \|$$

تمارين 5 . 1

1) إذا كان u, v متجهين في فضاء الضرب الداخلي V، فبرهن أن

$$\| u \| - \| v \| \leq \| u + v \|$$

2) أوجد المسافة بين المتجهين $u = (3, -5, 4)$ و $v = (6, 2, -1)$

3) لنفرض أن C هو فضاء الدوال المتصلة على **R**.

برهن أن:

$$< f, g > = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

تعرف عملية ضرب داخلي على C.

4) إذا كانت $u = 5x^2 + 2x - 4$ و $v = x^2 + 1$ في P_2.

فأوجد:

أ) $\| u \|$

ب) $d(u, v)$

ج) متجه الوحدة في إتجاه v.

5) إذا كان $u = (1, 2, -1)$ و $v = (2, 1, 3, 1)$، فأوجد

أ) $< u, v >$ ب) $\| u \|$

ج) $\| v \|$ د) $d(u, v)$

6) إذا كان u, v متجهي وحدة متعامدان، فبرهن أن $\| u - v \| = \sqrt{2}$.

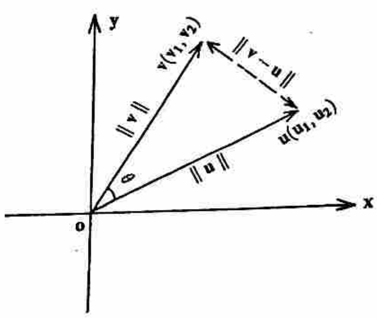
2 . 5 التعامد

تعريف 1 . 2 . 5

الزاوية بين متجهين غير صفريين u, v في فضاء الضرب الداخلي هي الزاوية θ التي تحقق ما يلي:

$$\cos\theta = \frac{< u, v >}{\| u \| \| v \|}$$

فمثلاً في $\mathbf{R}^2$ نجد أن الصورة الهندسية للقانون $\cos\theta = \frac{< u, v >}{\| u \| \| v \|}$ هي:



مثال 1 :

أوجد الزاوية بين المتجهين $u = (2, -1, 1), v = (1, 1, 2)$ في $\mathbf{R}^3$.

الحـل

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\| u \| \| v \|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

إذن:

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

المتجهات المتعامدة:

تعريف الزاوية بين متجهين في فضاء الضرب الداخلي يقودنا إلى فكرة التعامد بين المتجهات.

تعريف 5.2.2

يقال بأن المتجهين u, v في فضاء الضرب الداخلي V متعامدان إذا كان $\langle u, v \rangle = 0$.

تعريف 5.2.3

لنفرض أن A مجموعة جزئية من فضاء الضرب الداخلي V.

المتجه u في V متعامد مع المجموعة A إذا كان u متعامداً مع كل متجه من متجهات المجموعة A.

مثال 2:

لنفرض أن C هو فضاء الدوال المتصلة على $\mathbf{R}$.

إذا عرف الضرب الداخلي على هذا الفضاء كما يلي:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx$$

فحدد ما إذا كانت الأزواج التالية متعامدة أم لا.

أ) $g(x) = 1 - x,\ f(x) = 1 + x$

ب) $g(x) = \cos(\pi x),\ f(x) = \sin(\pi x)$

الحـل

أ) $$\langle 1 + x, 1 - x \rangle = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)dx$$

$$= x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{4}{3}$$

إذن: $1 + x$ و $1 - x$ متجهان غير متعامدين في C.

ب) $$\langle \sin(\pi x), \cos(\pi x) \rangle = \int_{-1}^{1} \sin(\pi x) \cos(\pi x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \quad \frac{\sin^2(\pi x)}{2} \Big|_{-1}^{1} = 0$$

إذن المتجهان $\sin(\pi x)$ و $\cos(\pi x)$ متعامدان في C

مثال 3:

لنفرض أن P_2 هو فضاء دوال كثيرة الحدود من الدرجة الثانية.
الضرب الداخلي على P_2 يعرف كما يلي:

إذا كانت:

$$q(x) = b_0 + b_1 + b_2x^2, \; p(x) = a_0 + a_2x + a_2x^2$$

فإن:

$$< p, q > = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

يعرف الفضاء الجزئي A بأنه الفضاء الجزئي من p_2 والمتولد من المتجهين $1 + x + x^2$ و $1 - 2x + 3x^2$، أي أن:

$$A = \text{span}\{1 + x + x^2, 1 - 2x + 3x\}$$

إذا كانت $u = 5 - 2x + 3x^2$، فبرهن أن u متعامد مع A.

الحل

أولاً:

$$< 5 - 2x - 3x^2, 1 + x + x^2 > = 5 - 2 - 3 = 0$$

و

$$< 5 - 2x - 3x^2, 1 - 2x + 3x^2 > = 5 + 4 - 9 = 0$$

أي أن $5 - 2x - 3x^2$ متعامد مع كل من $1 + x + x^2$ و $1 - 2x + 3x^2$.

الآن لنفرض أن $v \in A$.

هذا يعني أن $v = K_1(1 + x + x^2) + K_2(1 - 2x + 3x^2)$ حيث K_1 و K_2 عددان حقيقيان.

$$< 5 - 2x - 3x^2, v > = < 5 - 2x - 3x^2, K_1(1 + x + x^2) + K_2(1 - 2x + 3x^2) >$$

$$= < 5 - 2x - 3x^2, K_1(1 + x + x^2) > + < 5 - 2x - 3x^2, K_2(1 - 2x + 3x^2) >$$

$$= K_1 < 5 - 2x - 3x^2, 1 + x + x^2 > + K_2 < 5 - 2x - 3x^2, 1 - 2x + 3x^2 >$$

$$= K_1 0 + K_2 0 = 0$$

إذا $5 - 2x - 3x^2$ متعامد مع A.

تمارين 2.5

لنفرض أن V فضاء الضرب الداخلي. وأن K عدد.

فبرهن على أن

1) $< u, kv > = k(u, v)$

2) $< u, o > = 0$

3) $< u + v, w > = < u, w > + < v, w >$

4) لنفرض أن R^2 معرف عليه الضرب الداخلي كما يلي:

إذا كان $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$ فإن:

$$< u, v > = 4u_1v_1 + 9u_2v_2$$

إذا كانت $u = (9, 2)$ و $v = (6, -2)$ فأوجد

أ) $< u, v >$ ب) $\| u \|$

ج) $\| v \|$ د) $d(u, v)$

هـ) متجه الوحدة في اتجاه v و) الزاوية بين v, u

5) برهن على أن $\| u + v \|^2 + \| u - v \|^2 = 2 \| u \|^2 + 2 \| v \|^2$

6) برهن على أن $< u, v > = \frac{1}{2} \| u + v \|^2 - \frac{1}{2} \| u - v \|^2$

7) برهن على أن $\| u + v \| = \| u - v \|$ إذا وإذا كان فقط v, u متعامدين.

8) لنفرض أن $v \in V$ حيث V فضاء اتجاهي.

إذا كان $W = \{u \in V : u \perp v\}$، فوضح أن W فضاء جزئي من V.
لاحظ أن W يتكون من كل المتجهات المتعامدة مع v.

9) لنفرض أن $x_1, x_2, \dots, x_n$ متجهات في R^n، وأن المصفوفة A هي المصفوفة التي أعمدتها المتجهات $x_1, x_2, \dots, x_n$ برهن أن A^TA مصفوفة قطرية إذا وإذا كان فقط كل زوج من المتجهات $x_1, x_2, \dots, x_n$ متعامد.

5 . 3 التعامد والتعامد المنظم

المجموعات المتعامدة والمجموعات المتعامدة المنظمة

تعريف 5 . 3 . 1

لنفرض أن A مجموعة جزئية من فضاء الضرب الداخلي V.

أ) تسمى A مجموعة متعامدة Orthogonal set إذا كان كل متجهين غير متساويين متعامدين.

ب) إذا كانت A مجموعة متعامدة وكل متجه v في A هو متجه وحدة، فإن A تسمى مجموعة متعامدة منظمة Orthonormal set.

تعتبر المجموعة التي تحتوي على متجه واحد بأنها مجموعة متعامدة.

إذا كانت $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$، فإن التعريف السابق يعني أن A متعامدة إذا كان $< v_i, v_j > = 0$ لكل $i \neq j$

و A متعامدة منظمة إذا كان

$$< v_i, v_j > = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

من الملاحظ أنه يمكن تحويل أي مجموعة متعامدة إلى مجم
متعامدة منظمة.

المثال التالي يوضح هذه الفكرة:

مثال 4 :

إذا كان:

$v_1 = (1, -5, 2)$ و $v_2 = (1, 1, 2)$ و $v_3 = (2, 0, -1)$

فوضح أن المجموعة $\{v_1, v_2, v_3\}$ متعامدة، ومن هذه المجموعة
مجموعة متعامدة منظمة.

الحل

$$< v_1, v_2 > = 1(1) + 1(-5) + 2(2) = 0$$
$$< v_1, v_3 > = 1(2) + 0(-5) + 2(-1) = 0$$
$$< v_2, v_3 > = 1(2) + 1(0) + 2(-1) = 0$$

إذن المجموعة $\{v_1, v_2, v_3\}$ مجموعة متعامدة.

الآن

$$\| v_1 \| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{30}$$

$$\| v_2 \| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$\| v_3 \| = \sqrt{2^2 + 0 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

ومن ذلك فإن متجهات الوحدة هي:

$$u_1 = \frac{v_1}{\| v_1 \|} = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}\right)$$

$$u_2 = \frac{v_2}{\| v_2 \|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$u_3 = \frac{v_3}{\| v_3 \|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

إذن المجموعة $\{u_1, u_2, u_3\}$ مجموعة متعامدة منظمة.

هناك بعض الخواص المفيدة للمجموعات المتعامدة والمجموعات المتعامدة المنظمة والتي تساعد في الحصول على أساسية متعامدة في الفضاء الاتجاهي أو أساسية متعامدة منظمة بعد تعريف الضرب الداخلي على الفضاء الاتجاهي.

نظرية 1.3.5

إذا كانت $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ مجموعة متعامدة من المتجهات غير الصفرية في فضاء الضرب الداخلي V، فإن A تكون مستقلة خطياً.

البرهان

لنفرض إن:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0$$

$$< a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n, v_i > = < 0, v_i >$$

$$a_1 < v_1, v_i > + a_2 < v_2, v_i > + ... + a_n < v_n, v_i > = 0$$

حيث إن A مجموعة متعامدة، فإن $< v_i, v_j > = 0$ لكل $i \neq j$.

إذن:

$$a_i < v_i, v_i > = 0$$

وهذا يعني أن $a_i = 0$ أو $< v_i, v_i > = 0$، ولكن $< v_i, v_i > \neq 0$ لأن v_i متجه غير صفري.

إذن $a_i = 0$ لكل i وهذا يعني أن المجموعة $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ مجموعة مستقلة خطياً.

من هذه النظرية نستنتج أنه إذا كانت B مجموعة متعامدة من المتجهات غير الصفرية في فضاء الضرب الداخلي V والذي بعده n، فإن B تكون أساسية للفضاء V إذا وإذا كانت B تحتوي على n من العناصر.

الأساسية B في فضاء الضرب الداخلي V تسمى أساسية متعامدة Orthogonal basis إذا كانت B مجموعة متعامدة، وتسمى أساسية متعامدة منظمة Orthonormal basis إذا كانت B مجموعة متعامدة منظمة.

إذا كانت $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ أساسية في الفضاء الاتجاهي V، فإن أي متجه $v \in V$ يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية لمتجهات B، أي أن:

$$V = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$$

حيث a_i أعداد.

الجدير بالذكر أنه إذا كان V فضاء الضرب الداخلي وكانت $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ أساسية متعامدة منظمة، فإنه يمكن تعيين المعاملات a_i بدلالة الضرب الداخلي.

النظرية التالية توضح هذه الفكرة:

نظرية 2.3.5

إذا كانت $B = \{v_1, v_2, .., v_n\}$ أساسية متعامدة منظمة في فضاء الضرب الداخلي V، فإن:

$$v = < v, v_1 > v_1 + < v, v_2 > v_2 + ... + < v, v_n > v_n$$

لأي متجه v في V.

البرهان

بما أن B أساسية في الفضاء الاتجاهي V، فإن هناك أعداداً a_i تحقق.

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$$

الآن:

$$\langle v, v_i \rangle = \langle a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n, v_i \rangle$$

$$= a_1 \langle v_1, v_i \rangle + a_2 \langle v_2, v_i \rangle + \dots + a_i \langle v_i, v_i \rangle + \dots + a_n \langle v_n, v_i \rangle$$

$$= 0 + 0 + \dots + a_i + 0 + \dots + 0$$

لأن:

$$\langle v_i, v_i \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

إذن: $a_i = \langle v, v_i \rangle$ لكل i

بالتعويض في (1) نجد أن:

$$v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle v, v_n \rangle v_n$$

تمارين 3.5

1) أوجد المتجه $u = (x, y, z)$ حيث u متعامد مع كل من:

$$(1, 2, 1)\ ,\ (1, 1, 0)\ ,\ (1, 1, 1)$$

2) برهن أن:

$$\| x + y \| = \| x - y \|$$

إذا وإذا كان فقط x و y متعامدين.

3) إذا كان u و v متجهين متعامدان منظمان فبرهن أن:

$$\| u - v \| = \sqrt{2}$$

4) إذا كان u متجه متعامد مع المتجهين v وw فبرهن أن u متعامد مع أي تركيبة خطية للمتجهين v و w.

5) لنفرض أن:

$$A = \{1 + x, 1 - x\}$$

مجموعة جزئية من P_1.

أ) وضح أن A أساسية متعامدة للفضاء P_1.

ب) حول A إلى أساسية متعامدة منظمة للفضاء P_1.

4.5 عملية جرام ـ شميدت (Gram - Schmidt) للتعامد المنظم

المجموعات المتعامدة المنظمة تعتبر من المجموعات التي يسهل التعامل معها، لهذا السبب نحاول الوصول إلى إجراء يضمن تحويل أي مجموعة مستقلة خطياً في فضاء الضرب الداخلي إلى مجموعة متعامدة منظمة.

لنفرض أن $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ مجموعة من المتجهات المستقلة خطياً في فضاء الضرب الداخلي V.

الإجراءات التالية على المجموعة $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ تحولها إلى مجموعة متعامدة منظمة.

1) نفرض أن $w_1 = u_1$

2) نفرض أن $w_2 = u_2 - k_1w_1$

الذي نريده الآن هو أن يكون w_1, w_2 متعامدين، ومن الشرط

$< w_1, w_2 > = 0$ نحاول الحصول على k_1.

3) نفرض أن $w_3 = u_3 - k_1w_1 - k_2w_2$ ونستخدم الشرط $< w_3, w_1 > = 0$ والشرط $< w_3, w_2 > = 0$ للحصول على k_1, k_2.

وهكذا بنفس الأسلوب نصل إلى:

4) نفرض أن $w_n = u_n - k_1w_1 + k_2w_2 + \dots + k_{n-1}w_{n-1}$

ونستخدم الشروط.

$$< w_n, w_1 > = 0, < w_n, w_2 > = 0, \dots, < w_n, w_{n-1} > 0$$

للحصول على:

$$K_1, K_2, \dots, K_{n-1}$$

المجموعة $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ مجموعة متعامدة من المتجهات غير الصفرية.

الآن نفرض أن:

$$v_i = \frac{w_i}{\| w_i \|} \quad \text{لكل} \quad 1 \le i \le n$$

المجموعة $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعة من المتجهات المتعامدة المنظمة.

مثال 5:

إذا كانت:

$$\{(1, 1, -1), (1, 4, -4), (1, 2, 2)\}$$

فأوجد المجموعة المتعامدة المنظمة المناظرة لهذه المجموعة.

الحل

هذه المجموعة مستقلة خطياً (تأكد من ذلك).

من الإجراء السابق نجد أن:

$$w_1 = (1, 1, -1) = u_1$$

و $W_2 = u_2 - K_1W_1$ حيث $< W_2, W_1 > = 0$

إذن:

$$\begin{aligned} < W_2, W_1 > &= < u_2 - K_1W_1, W_1 > \\ &= < u_2, W_1 > - K_1 < W_1, W_1 > \\ &= 1(1) + 4(1) + (-4)(-1) - K_1(1^2 + 1^2 + (-1)^2) \\ &= 9 - 3K_1 = 0 \end{aligned}$$

ومن ذلك نجد أن: $K_1 = 3$

إذن:

$$\begin{aligned} W_2 &= (1, 4, -4) - 3(1, 1, -1) \\ &= (1, 4 - 4) - (3, 3, -3) \\ &= (-2, 1, -1) \end{aligned}$$

و $W_3 = u_3 - K_1W_1 - K_2W_2$ حيث $< W_3, W_1 > = 0$ و $< w_3, W_2 > = 0$.

إذن:

$$\begin{aligned} < W_3, W_1 > &= < u_3 - K_1W_1 - K_2W_2, W_1 > \\ &= < u_3, W_1 > - K_1 < W_1, W_1 > - K_2 < W_2, W_1 > \\ &= 1 - 3K_1 = 0 \end{aligned}$$

ومن ذلك نجد أن: $K_1 = \frac{1}{3}$

إذن:

$$\langle W_3, W_2 \rangle = \langle u_3 - K_1W_1 - K_2W_2, W_2 \rangle$$
$$= \langle u_3, W_2 \rangle - K_1 \langle W_1, W_2 \rangle - K_2 \langle W_2, W_2 \rangle$$
$$= -2 - 6K_2 = 0$$

ومن ذلك نجد أن:

$$K_2 = \frac{1}{3}$$

إذن:

$$W_3 = u_3 - \frac{1}{3}W_1 + \frac{1}{3}W_2$$
$$= (1, 2, 2) - \frac{1}{3}(1, 1, -1) + \frac{1}{3}(-2, 1, -1)$$
$$= (0, 2, 2)$$

هذه الاجراءات توصلنا إلى المجموعة المتعامدة.

$$\{(1, 1, -1), (-2, 1, -1), (0, 2, 2)\}$$

ومن هذه المجموعة نحصل على مجموعة متعامدة منظمة على النحو التالي:

$$v_1 = \frac{W_1}{\| W_1 \|} = \frac{(1, 1 - 1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$v_2 = \frac{W_2}{\| W_2 \|} = \frac{(-2, 1 - 1)}{\sqrt{6}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$
$$v_3 = \frac{W_3}{\| W_3 \|} = \frac{(0, 2 2)}{2\sqrt{2}} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

أي أن:

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

مجموعة متعامدة منظمة.

من الإجراء السابق نلاحظ أن $\langle W_2, W_1 \rangle = 0$ وهذا يعني أن $\langle u_2 - K_1W_1, W_1 \rangle = 0$ والذي يؤدي إلى أن:

$$\langle u_2, W_1 \rangle = K_1 \langle W_1, W_1 \rangle$$

وبذلك فإن:

$$K_1 = \frac{\langle u_2, W_1 \rangle}{\langle W_1, W_1 \rangle}$$

وحيث إن: $\| W_1 \|^2 = \langle W_1, W_1 \rangle$

فإن:

$$K_1 = \frac{\langle W_2, W_1 \rangle}{\| W_1 \|^2}$$

ونستطيع الوصول إلى القاعدة التالية:

قاعدة جرام ـ شميدت للتعامد

إذا كانت:

$$\{u_1, u_2, ..., u_n\}$$

مجموعة مستقلة خطياً في فضاء الضرب الداخلي V، فإنه يمكن الحصول على مجموعة متعامدة منظمة بالطريقة التالية:

1) $W_1 = u_1$

2) $W_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, W_1 \rangle}{\| W_1 \|^2} W_1$

3)
$$W_3 = u_3 - \frac{< u_3, W_1 >}{\| W_1 \|^2} W_1 - \frac{< u_3, W_2 >}{\| W_2 \|^2} W_2$$

وهكذا إلى:

4)
$$W_n = u_n - \frac{< u_n, W_1 > W_1}{\| W_1 \|^2} - \frac{< u_n, W_2 > W_2}{\| W_2 \|^2} - \ldots\ldots - \frac{< u_n, W_{n-1} > W_{n-1}}{\| W_{n-1} \|^2}$$

إذا كان V هو فضاء الضرب الداخلي وبعده n، فإنه يملك أساسية تحتوي على n من العناصر المستقلة خطياً، وطريقة جرام ـ شميدت تضمن تحويل هذه المجموعة إلى أساسية متعامدة منظمة للفضاء V.

هذا يوصلنا إلى النتيجة التالية:

نظرية 1 . 4 . 5

كل فضاء ضرب داخلي ذي بعد نهائي له أساسية متعامدة منظمة.

سبق وأن عرفنا المصفوفة المتعامدة بأنها المصفوفة المربعة التي محورتها تساوي معكوسها، أي أنه إذا كانت A مصفوفة متعامدة، فإن:

$$A^{-1} = A^T$$

ومن ذلك نجد أن:

$$AA^T = I$$

إذا كانت أعمدة A هي $q_1, q_2, \ldots, q_n$، فإن:

$$AA^T = [q_1\, q_2 \ldots q_n] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

ومن ذلك نستنتج أن أعمدة المصفوفة المتعامدة تكون متعامدة منظمة، ونفس الاستنتاج يصح على صفوف المصفوفة المتعامدة.

مثال 6:

وضح أن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

تكون مصفوفة متعامدة، وأوجد A^{-1}

الحل

من الواضح أن أعمدة A أعمدة متعامدة وبذلك فإن A مصفوفة متعامدة.

بما أن $A^{-1} = A^T$، فإن:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

نظرية 5 . 4 . 2

الضرب في مصفوفة متعامدة يحافظ على الطول.

هذه النظرية تعني أنه إذا كان x متجه، فإن:

$$\| Ax \| = \| x \|$$

عندما تكون A مصفوفة متعامدة.

البرهان

$$\| Ax \|^2 = \langle Ax, Ax \rangle$$

عندما عرفنا ضرب المصفوفات، فإننا عرفناه بدلالة الضرب الداخلي.
نرجع إلى ذلك التعريف ونستخدمه في حالتنا هذه.

$$\begin{aligned}\langle Ax, Ax \rangle &= (Ax)^T(Ax)\\ &= (x^TA^T)Ax)\\ &= x^T(A^TA)x\\ &= x^TIx = x^2\end{aligned}$$

إذن:

$$\| Ax \|^2 = x^2 = \| x \|^2$$

ومن ذلك نجد أن:

$$\| Ax \| = \| x \|$$

نظرية 5 . 4 . 3

تحافظ المصفوفة المتعامدة على عملية الضرب الداخلي.

هذا يعني أن:

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$$

عندما تكون A مصفوفة متعامدة.

البرهان

من تعريفنا السابق للضرب الداخلي نجد أن:

$$\langle Ax, Ay \rangle = (Ax)^T(Ay)$$

$= x^T(A^TA)y$ لأن A مصفوفة متعامدة.

$$= x^Ty$$

$$= \langle x, y \rangle$$

ومن ذلك نجد:

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$$

تمارين 5 . 4

في التمارين من 1 إلى 3 طبق عملية جرام ـ شميدت على المتجهات المعطاة.

1) $B = \{(1, 2), (1, 3)\}$ في $\mathbf{R}^2$.

2) $B = \{(1, -1, 0), (-1, 1, 1), (1, 1, -2)\}$ في $\mathbf{R}^3$.

3) $B = \{(1, -1, -1), (2, 0, 1, -1), (1, 3, -4, 0), (9, 0, 0, 0)\}$ في $\mathbf{R}^4$.

4) لنفرض أن p_2 هو فضاء كثيرات الحدود من الدرجة الثانية.

إذا كان $u = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $v = b_0 + b_1x + b_2x^2$ في p_2.

فنعرف الضرب الداخلي في الفضاء p_2 كما يلي:

$$u.v = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

إذا كانت $B = \{1 + x + x^2, 1 + 2x, 3\}$، فأوجد ما يلي:

أ) $\| 1 + x + x^2 \|$

ب) متجه الوحدة في اتجاه $1 + 2x$.

ج) طبق عملية جرام ـ شميدت للحصول على أساسية متعامدة للفضاء p_2

5) إذا كانت A مصفوفة متعامدة، فبرهن أن A^T مصفوفة متعامدة أيضاً.

6) هل المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

متعامدة.

إذا كانت الإجابة بنعم فأوجد A^{-1}.

7) إذا كانت A مصفوفة متماثلة، فبرهن أن A متعامدة إذا وإذا كان فقط $A^2 = I$.

تمارين الفصل الخامس

1) إذا كان f, g متجهان في p_2 وعرف الضرب الداخلي

$$< f, g > = \int_0^1 x f(x) g(x) \, dx$$

فأوجد:

أ) $< f, g >$ إذا كانت $f(x) = x, g(x) = x^2$

ب) أوجد a إذا كان $f(x) = x, g(x) = 1 + ax$ متعامدين.

2) إذا كان

$$u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$$

متجهين في R^2، وعرف.

$$< u, v > = 2u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_2v_2$$

وضح أن $< u, v >$ تعرف عملية ضرب داخلي على R^2.

3) إذا كانت A مصفوفة متعامدة، فبرهن أن A^T تكون مصفوفة متعامدة أيضاً.

4) إذا كانت B مصفوفة متخالفة التماثل و $I + B$ مصفوفة غير شاذة (قابلة للانعكاس)، فوضح أن $(I - B)(1 + B)^{-1}$ مصفوفة متعامدة.

5) لنفرض أن:

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$$

أساسية متعامدة منظمة لفضاء جزئي من R^n.

إذا كان:

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_ku_k$$

فبرهن أن :

$$\| v \|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2$$

6) إذا كان x في $\mathbf{R}^n$ متعامد مع المجموعة المستقلة خطياً $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ ، فبرهن أن المجموعة $\{x, y_1, y_2, \dots, y_k\}$ تكون مستقلة خطياً.

7) أوجد المتجهات المتعامدة مع المجموعة

$$\left\{(2, 1, -1), (1, 2, 1)\right\}$$

8) ما هي قيم b, a التي تجعل:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & a \\ \frac{4}{5} & b \end{bmatrix}$$

مصفوفة متعامدة.

9) استخدم عملية جرام شميدت للحصول على أساسية متعامدة منظمة للفضاء $\mathbf{R}^3$ من المجموعة.

$$\left\{(1, 0, 1), (1, 2, -2), (2, -1, 1)\right\}$$

10) إذا كان x, y متجهان في $\mathbf{R}^n$ وكانت θ الزاوية بينهما، فبرهن أن:

$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2 \| x \| \| y \| \cos\theta$$

الفصل السادس

المتجهات الذاتية والقيم الذاتية

Eigenvectors and eigenvalues

ندرس في هذا الفصل العلاقة بين بعض المصفوفات المربعة والمصفوفات القطرية المناظرة لها.

لا ريب أن هذه العلاقة تلعب دوراً كبيراً في حل الكثير من المسائل التطبيقية، فالفكرة هنا هي البحث عن متجه غير صفري x حيث Ax و x متجهان متوازيان، أي أن Ax مضاعف للمتجه x.

1.6 تعريف المتجهات الذاتية والقيم الذاتية

تعريف 1.1.6

إذا كانت A مصفوفة مربعة، فإن المتجه غير الصفري x في R^n يسمى المتجه الذاتي للمصفوفة A إذا كان Ax مضاعفاً قياسياً للمتجه x، هذا يعني أن $Ax = \lambda x$ حيث λ عدد.

تسمى λ القيمة الذاتية للمصفوفة A والمناظرة للمتجه الذاتي x.

إيجاد القيم الذاتية لمصفوفة A.

لنفرض أن I هي المصفوفة المحايدة من نوع $n \times n$.

نعلم ان: $\lambda x = \lambda I x$.

الآن وإذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة $A_{n \times n}$ والمناظرة للمتجه الذاتي x، فإنه من التعريف نجد أن:

$$Ax = \lambda I x$$

أو:

$$(A - \lambda I)x = 0 \qquad (1)$$

لكي تكون λ قيمة ذاتية للمصفوفة A فإنه لا بد من وجود حل غير تافه (أي حل بالإضافة إلى $x = 0$)، للمعادلة (1) لأن x متجه غير صفري في التعريف السابق.

إذا كان $|A - \lambda I| \neq 0$، فإن $(A - \lambda I)^{-1}$ تكون موجودة، وبالتالي الضرب في $(A - \lambda I)^{-1}$ يعطينا: أن حل المعادلة (1) يكون $x = 0$، ولهذا نستنتج أنه لكي يكون هناك حل آخر بالإضافة إلى الحل $x = 0$، فإن $|A - \lambda I| = 0$.

تسمي المعادلة $|A - \lambda I| = 0$ بالمعادلة المميزة Characteristic equation للمصفوفة A.

مثال 1:

أوجد القيم الذاتية للمصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

الحل:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

الآن:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3 - \lambda)(-\lambda) - (-1)(2)$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

حيث إن: $|A - \lambda I| = 0$، فإن $(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$.

ومن ذلك نجد أن:

$$\lambda = 2 \ , \quad \lambda = 1$$

مثال 2:

أوجد القيم الذاتية للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

الحـل

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

الآن

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

نجد هذه المحددة بواسطة الصف الثالث أو العمود الثالث،

$$|A - \lambda I| = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 2-\lambda \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\left[(2-\lambda)(2-\lambda) - (3)(1)\right]$$

$$= (4-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 1)$$

الآن

$$(4-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

ومن ذلك نجد أن $\lambda = 4$ أو $\lambda^2 - 4\lambda + 1\lambda = 0$

وبواسطة الصيغة التربيعية نجد أن: $\lambda = 2 \pm \sqrt{3}$

وهكذا نصل إلى أن:

$\lambda = 4$ و $\lambda = 2 + \sqrt{3}$ و $\lambda = 2 - \sqrt{3}$ تكون قيم ذاتية للمصفوفة A.

مثال 3:

أوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

الحـل

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

ومن ذلك نجد أن:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(1-\lambda) - (1)(2)$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 3$$

ومن ذلك نجد أن:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$$

والحل من أجل λ يوصلنا إلى أن $\lambda = 1 + \sqrt{2}\, i$ و $\lambda = 1 - \sqrt{2}\, i$ هي القيم الذاتية للمصفوفة A.

نلاحظ من هذا المثال بأنه قد تكون القيم الذاتية أعداداً مركبة حتى وإن كانت المصفوفة بمداخل من أعداد حقيقية.

أوجد القيـم الذاتية للمصفوفة.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & - & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحـل

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 3 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

الآن:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

بالفك مستخدمين الصف الثالث نجد أن:

$$|A - \lambda I = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)[(2-\lambda)(-2-\lambda) - (-1)(3)]$$
$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 1$$
$$= (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda+1)$$

من المعادلة:

$$(1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1) = 0$$

نجد أن: $\lambda = 1$ و $\lambda = 1$ و $\lambda = -1$ هي القيم الذاتية للمصفوفة A.

نلاحظ أن: $\lambda = 1$ هي قيمة ذاتية متكررة مرتين.

قد تكون القيمة الذاتية لمصفوفة A متكررة K مرة، وفي هذه الحالة نقول بأن القيمة الذاتية للمصفوفة A متكررة K من المرات.

من الأمثلة السابقة نستطيع الوصول إلى النظرية التالية التي توضح الشروط الضرورية والكافية لكي يكون العدد λ قيمة ذاتية للمصفوفة A.

نظرية 1.1.6

الشروط التالية هي شروط ضرورية وكافية لكي يكون λ قيمة ذاتية للمصفوفة A:

1) يوجد متجه غير صفري x يحقق $Ax = \lambda x$.

2) المصفوفة $A - \lambda I$ مصفوفة شاذة.

3) $|A - \lambda I| = 0$

إيجاد المتجهات الذاتية للمصفوفة A:

مثال 5:

أوجد المتجهات الذاتية للمصفوفة.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

الحـل:

وجدنا في مثال سابق أن القيم الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda = 1, \lambda = 2$.

الآن نحاول إيجاد المتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda = 1$.

نعلم أن:

$$(A - \lambda_1 I)x_1 = 0 \quad \text{فإذا كانت:} \quad x_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

فإن:

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0$$

ومن ذلك نجد أن:

$$2y_1 + 2y_2 = 0$$

$$-y_1 - y_2 = 0$$

وبحل هذه النظام يكون لدينا:

$$y_1 = -y_2$$

بأخذ y_2 مقدار اختياري، مثلاً $y_2 = t$ نجد أن $y_1 = -t$، وبذلك فإن:

$$x_1 = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}$$

أو:

$$x_1 = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بإعطاء قيم اختيارية للوسيط t نتحصل على متجهات ذاتية مختلفة ولكن كل متجه منها هو مضاعف للمتجه.

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

إذن:

$x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ متجه ذاتي مستقل للمصفوفة A والمناظر للقيمة الذاتية $\lambda = 1$.

الآن نحاول بنفس الطريقة إيجاد المتجه الذاتي للمصفوفة A والمناظر للقيمة الذاتية $\lambda = 2$.

$$(A - \lambda I)x_2 = 0$$

أو:

$$(A - 2I)x_2 = 0$$

فإذا كانت:

$$x_2 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

فإن:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0$$

وبذلك نحصل على النظام:

$$y_1 + 2y_2 = 0$$

$$-y_1 - 2y_2 = 0$$

وبحل هذا النظام يكون لدينا:

$$y_1 = -2y_2$$

بأخذ قيم اختيارية للمتغير y_2 مثلاً $y_2 = t$ نجد أن:

$$y_1 = -2t$$

وبذلك، فإن:

$$x_2 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبأخذ قيم مختلفة للوسيط t نتحصل على متجهات ذاتية مختلفة ولكنها مرتبطة خطياً.

إذن: $x_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ متجه ذاتي للمصفوفة A مستقل خطياً يناظر القيمة الذاتية $\lambda = 2$.

مجموعة كل المتجهات الذاتية x والمناظرة للقيمة الذاتية λ للمصفوفة المربعة A لا تكون فضاء جزئياً من R^n لأن المتجه الصفري لا يكون متجهاً ذاتياً ولكن مجموعة كل المتجهات الذاتية x والمناظرة للقيمة الذاتية λ للمصفوفة المربعة A بالاضافة إلى المتجه الصفري تكون فضاء جزئياً من R^n. هذا الفضاء الجزئي يسمي الفضاء الذاتي (Eigenspace) للمصفوفة A المناظر للقيمة الذاتية λ.

أي أن:

$$M_\lambda = \{x \in R^n : (A - \lambda I)\, x = 0\} \cup \{0\}$$

يكفي للتعرف على هذا الفضاء الجزئي معرفة أساسية لهذا الفضاء الجزئي فعلى سبيل المثال، أساسية الفضاء الذاتي M_1 للمصفوفة A في المثال السابق هي:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

وأساسية الفضاء الذاتي M_2 للمصفوفة A في المثال السابق نفسه هي:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

مثال 6:

أوجد أساسية للفضاء الذاتي للمصفوفة A المناظرة لكل قيمة ذاتية لهذه المصفوفة.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل

أولاً نجد القيم الذاتية لهذه المصفوفة.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

ومن ذلك:

$$|A - \lambda I| = 0$$

نجد أن:

$$|A - \lambda I| = -\lambda^2(\lambda + 3)$$

ومن ذلك: $-\lambda^2(\lambda + 3) = 0$

نجد أن القيم الذاتي هي: $\lambda_1 = -3$ و $\lambda_2 = 0$ متكررة مرتين.

الآن نحاول أن نجد أساسية للفضاء الذاتي M_{-3} المناظر للقيمة الذاتية $\lambda = -3$.

$$(A + 3I)x_1 = 0$$

حيث:

$$x_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

ومن:

$$(A + 3I)x_1 = 0$$

نجد أن:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0$$

وبذلك يكون لدينا النظام:

$$2y_1 - y_2 + y_3 = 0$$
$$y_1 + 2y_2 + y_3 = 0$$
$$y_1 + y_2 + 2y_3 = 0$$

وبحل هذا النظام نصل إلى:

$$y_1 + y_3 = 0$$
$$y_2 + y_3 = 0$$

ومن ذلك نجد أن:

$y_2 = -y_3$ وبإعطاء قيم اختيارية للمتغير y_3 مثلاً $y_3 = t$ نجد أن:

$$y_2 = -t$$

والآن: $y_1 = -t$.

إذن المتجه الذاتي x_1 المناظر للقيمة الذاتية $\lambda = -3$ هو:

$$x_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

إذن أساسية للفضاء الذاتي M_{-3} هي:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

والآن نجد أساسية للفضاء الذاتي M_0:

$$x_2 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad \text{حيث} \quad (A - 0I)x_2 = 0$$

ومن ذلك نجد أن:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0$$

وهذا يوصلنا إلى:

$$-y_1 - y_2 + y_3 = 0$$
$$-y_1 - y_2 + y_3 = 0$$
$$y_1 + y_2 - y_3 = 0$$

ومن هذا النظام نصل إلى:

$$y_1 + y_2 - y_3 = 0$$

فإذا كان $y_3 = t_1$ و $y_2 = t_2$، فإن $y_1 = t_1 - t_2$

إذن:

$$X_2 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 - t_2 \\ t_2 \\ t_1 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إذن أساسية الفضاء الذاتي M_0 هي:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

لاحظنا في هذا المثال أن القيمة الذاتية للمصفوفة A قد تكون صفراً ولكن من التعريف، لا بد أن يكون المتجه الذاتي متجهاً غير صفري.

نظرية 2.1.6

إذا كانت A مصفوفة مثلثية (مصفوفة مثلث علوي، مصفوفة مثلث سفلي، مصفوفة قطرية)، فإن القيم الذاتية للمصفوفة A هي مداخل القطر الرئيسي.

البرهان

لنفرض أن A مصفوفة مثلث علوي.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

الآن:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

وبذلك فإن $A - \lambda I$ مصفوفة مثلث علوي، ونعلم أن محددة مصفوفة المثلث العلوي هي حاصل ضرب مداخل القطر الرئيسي.

$$|A - \lambda I| = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\ldots(a_{nn} - \lambda)$$

وعندما يكون $|A - \lambda I| = 0$ نجد أن:

$$\lambda = a_{11},\ \lambda = a_{22},\ \ldots,\ \lambda = a_{nn}$$

تعريف 2.1.6

لنفرض أن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من نوع $n \times n$.

أثر A (Trace of A) هو مجموع عناصر القطر الرئيسي، ويرمز له بالرمز Tr (A).

أي أن القيم الذاتية لهذه المصفوفة هي مداخل القطر الرئيسي. في حالة مصفوفة المثلث السفلي أو المصفوفة القطرية يكون البرهان مشابهاً للبرهان المعطى.

لو رجعنا إلى الأمثلة التي وجدنا فيها القيم الذاتية للمصفوفة المعطاة نلاحظ أن مجموع القيم الذاتية للمصفوفة المعطاة يساوي أثر هذه المصفوفة، وحاصل ضرب القيم الذاتية للمصفوفة المعطاة يساوي محددة تلك المصفوفة، أي أن:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn} = Tr(A)$$

و:

$$\lambda_1 . \lambda_2 . \lambda_3 \dots \lambda_n = | A |$$

من الجدير بالذكر أنه إذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ قيم ذاتية للمصفوفة A، فإن $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$ هي القيم الذاتية للمصفوفة A^2.

لتوضيح ذلك نقول:

إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة A، فإن:

$$Ax = \lambda x$$

والآن بالضرب في A نصل إلى:

$$A^2x = A\lambda x = \lambda Ax = \lambda^2 x$$

وهذا يعني أن λ^2 هي القيمة الذاتية للمصفوفة A ويكون المتجه الذاتي للمصفوفة A^2 هو نفسه x.

تمارين 1 . 6

في التمارين من 1 إلى 5 أوجد القيم الذاتية للمصفوفة المعطاة.

1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

في التمارين من 6 إلى 9 أوجد أساسية للفضاء الذاتي المناظر لكل قيمة ذاتية للمصفوفة المعطاة.

6) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & -5 \\ 0 & 8 & -7 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

9) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

9) برهن أن $\lambda = 0$ تكون قيمة ذاتية للمصفوفة A إذا وإذا كان فقط.

$$| A | = 0$$

10) ما هي الشروط على a بحيث يكون للمصفوفة.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4a \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

أ) قيم ذاتية حقيقية مختلفة.

ب) قيم ذاتية حقيقية متكررة.

ج) قيم ذاتية مركبة.

11) إذا كانت $A = M^{-1}BM$، فبرهن أن A و B لهما نفس القيم الذاتية.

12) إذا كانت A مصفوفة مربعة و $A^2 = A$، فبرهن أنه إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة A، فإن $\lambda = 0$ أو $\lambda = 1$.

13) كون مصفوفتين من نوع 2×2 بحيث تكون القيم الذاتية للمصفوفة AB لا تساوي حاصل ضرب القيم الذاتية للمصفوفة A والقيم الذاتية للمصفوفة B.

14) كون مصفوفتين من نوع 2×2 بحيث تكون القيم الذاتية للمصفوفة $A + B$ لا تساوي جمع القيم الذاتية للمصفوفة A والقيم الذاتية للمصفوفة B.

15) برهن أن المصفوفة A والمصفوفة A^T لهما نفس القيم الذاتية.

16) أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

17) أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

18) إذا كانت A مصفوفة من نوع $n \times n$ وكان $A^T = \lambda A$، فوضح أن $\lambda = \pm 1$.

19) إذا كانت A مصفوفة من نوع $n \times n$، فبرهن أن:

أ) $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$

ب) $Tr(aA) = aTr(A)$ حيث a عدد.

ج) $Tr(AB) = Tr(A)Tr(B)$

20) وضح أن $Tr(AA^T)$ هو مجموع مربعات مداخل المصفوفة A.

21) إذا كانت A مصفوفة من نوع 2×2 وكانت λ_1 و λ_2 قيمتان ذاتيتان للمصفوفة A، فوضح أن:

$$A^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)A + \lambda_1\lambda_2 I$$

2.6 التحويل إلى الصورة القطرية

تحويل المصفوفة A إلى مصفوفة قطرية

تعرفنا سابقاً على المصفوفة القطرية ووجدنا أنه من السهل التعامل مع المصفوفة القطرية.

في هذا البند نحاول تحويل بعض المصفوفات المربعة إلى مصفوفة قطرية، وبالتالي يسهل علينا إيجاد القيم الذاتية للمصفوفة المعطاة وكذلك إيجاد متجهاتها الذاتية المستقلة خطياً.

تعريف 1.2.6

المصفوفة المربعة A تكون قابلة للقطرية (diagonalizable) إذا

وجدت مصفوفة قابلة للانعكاس P بحيث تكون المصفوفة.

$$D = P^{-1}AP$$

مصفوفة قطرية.

تسمى المصفوفة P بمصفوفة تحويل A إلى مصفوفة قطرية.

النظرية التالية توضح الشرط الذي يجب توفره حتى تكون المصفوفة A قابلة للقطرية.

نظرية 1.2.6

A مصفوفة من نوع $n \times n$ قابلة للقطرية إذا وإذا كان فقط للمصفوفة A عدد n من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً.

البرهان

لنفرض أن المصفوفة A قابلة للقطرية.

هذا يعني وجود مصفوفة قابلة للانعكاس P ومصفوفة قطرية D، حيث أن:

$$D = P^{-1}AP$$

أو:

$$PD = AP$$

لنفرض أن:

$$P = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & \cdots & x_{2n} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

و

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

حيث أن P قابلة للانعكاس، فإن أعمدتها تكون مستقلة خطياً. العمود الذي ترتيبه K في حاصل الضرب AP هو:

$$Ax_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{nk} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_{1k} + a_{12}x_{2k} + \ldots + a_{1n}x_{1k} \\ a_{21}x_{1k} + a_{22}x_{2k} + \ldots + a_{2n}x_{1k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1}x_{1k} + a_{n2}x_{2k} + \ldots + a_{nn}x_{nk} \end{bmatrix}$$

الآن العمود الذي ترتيبه K في حاصل الضرب PD هو:

$$\begin{bmatrix} x_{1k}\lambda_k \\ x_{2k}\lambda_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{nk}\lambda_k \end{bmatrix} = \lambda_k \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{nk} \end{bmatrix} = \lambda_K x_k$$

بما أن $AP = PD$ ، فإن العمود الذي ترتيبه K في AP يساوي العمود الذي ترتيبه K في PD .

إذن :
$$Ax_k = \lambda_k x_k$$

هذا يعني أن λ_k قيمة ذاتية للمصفوفة A و x_k متجه ذاتي للمصفوفة A مناظر للقيمة الذاتية λ_k .

إذن المصفوفة القابلة للانعكاس A يكون لها n من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً.

لبرهنت الاتجاه الآخر، نفرض أن A لها n من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً.

لنفرض أن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هي المتجهات الذاتية المستقلة خطياً للمصفوفة A وإن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ هي القيم الذاتية للمصفوفة A والمناظرة للمتجهات الذاتية $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

إذا كانت :

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & \ldots & 0 \\ & \cdot & & & \\ & \cdot & & & \\ & \cdot & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ و } P = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \ldots\ldots x_n \end{bmatrix}$$

وهذا يؤدي إلى أن :
$$AP = PD$$

وهذا يؤدي إلى أن :
$$D = P^{-1}AP$$

وهذا يعني أن A قابلة للقطرية.

وضحت النظرية السابقة بأنه إذا كانت A مصفوفة من نوع $n \times n$ ولها n من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً، فإنها تكون قابلة للتحويل إلى مصفوفة قطرية، علاوة على ذلك فإن الإجراء التالي والمنبثق من النظرية السابقة يوضح إيجاد المصفوفة P التي تحول A إلى مصفوفة قطرية.

إجراء تحويل مصفوفة إلى شكل قطري

لنفرض أن $A_{n \times n}$ مصفوفة قابلة للقطرية.

أ) تكون المصفوفة :
$$p = [p_1 \; p_2 \ldots\ldots p_n]$$

حيث $p_1, p_2, \ldots, p_n$ هي المتجهات الذاتية للمصفوفة A والمستقلة خطياً.

ب) تكون المصفوفة القطرية :

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

حيث λ_i هي القيمة الذاتية المناظرة للمتجه الذاتي p_i.

الآن :
$$D = p^{-1}Ap$$

مثال ٦ :

حول المصفوفة A حيث :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

إلى مصفوفة قطرية.

الحـل

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(1-\lambda) - 0\right] + (1)\left[0 - (1-\lambda)\right] \\ &= (1-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)\left[1 - 2\lambda + \lambda - 1\right] \\ &= (1-\lambda)(\lambda)(\lambda - 2) \end{aligned}$$

إذن:

$$\lambda = 0, 1.2$$

لكل قيمة ذاتية نجد المتجهات الذاتية المناظرة.

$$p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

إذن:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و:

$$D = P^{-1}Ap = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

النظرية التالية توضح متى تكون المتجهات الذاتية للمصفوفة $A_{n \times n}$ مستقلة خطياً.

نظرية 2.2.6

إذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ قيما ذاتية مختلفة للمصفوفة $A_{n \times n}$ وإذا كانت $x_1, \ldots, x_n$ هي المتجهات الذاتية المناظرة لهذه القيم الذاتية، فإن المجموعة $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ تكون مستقلة خطياً.

البرهان

لنفرض أن x_1, x_2 متجهين ذاتيين للمصفوفة A.

إذا كان:

$$a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \qquad (1)$$

فإنه بضرب (1) في (A) ينتج:

$$a_1Ax_1 + a_2Ax_2 = 0$$

و:

$$a_1\lambda_1x_1 + a_2\lambda_2x_2 = 0 \qquad (2)$$

بضرب المعادلة (1) في λ_2 والطرح من (2) ينتج أن:

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_2)x_1 = 0$$

الآن $x_1 \neq 0$ وبذلك فإن $(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$ وحيث أن $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$، فإن: $a_1 = 0$.

التعويض في (1) يوصلنا إلى أن $a_2 = 0$.

الآن:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \qquad (4)$$

بضرب المعادلة (4) في A نجد أن:

$$a_1Ax_1 + a_2Ax_2 + +a_3Ax_3 = 0$$

ومن ذلك:

$$a_1\lambda_1x_1 + a_2\lambda_2x_2 + a_3\lambda_3x_3 = 0 \qquad (5)$$

بضرب (4) في λ_3 والطرح من (5) ينتج أن:

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_3)x_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_3)x_2 = 0$$

وحيث أن x_1, x_2 مستقلان خطياً، فإن $a_1 = a_2 = 0$.

التعويض في (4) يعطينا $a_3 = 0$

وهكذا بتكرار نفس المناقشة يتم البرهان.

حيث إن المتجهات الذاتية هي التي تشكل أعمدة المصفوفة p والتي تحول المصفوفة A إلى مصفوفة قطرية، فإن المصفوفة p تكون قابلة للانعكاس، إذا كانت المتجهات الذاتية للمصفوفة A مستقلة خطياً.

هذه الملاحظة تقودنا إلى النظرية التالية:

نظرية 3.2.6

إذا كان للمصفوفة $A_{n\times n}$ قيم ذاتية مختلفة عددها n، فإن المصفوفة A تكون قابلة للقطرية.

البرهان

حيث أن A لها n من القيم الذاتية المختلفة، فإن المتجهات الذاتية $x_1, x_2, \dots, x_n$ والمناظرة للقيم الذاتية المختلفة تكون مستقلة خطياً.

حسب النظرية 1.2.6، فإن المصفوفة A تكون قابلة للقطرية.

مثال 8:

وضح أن المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

قابلة للقطرية.

الحل

$$|A - \lambda I| = (\lambda - 1)(2 - \lambda)(\lambda + 3)$$

إذن للمصفوفة A ثلاث قيم ذاتية مختلفة، وبذلك فإن المصفوفة A قابلة للقطرية حسب النظرية السابقة.

وأكثر من ذلك فإن:

$$D = p^{-1}Ap = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

ملاحظة:

عكس هذه النظرية غير صحيح، بمعنى قد تكون المصفوفة A من نوع n × n قابلة للقطرية على الرغم من أن لها أقل من n من القيم الذاتية المختلفة.

المثال التالي يوضح هذه الفكرة.